Variations autour de la loi exponentielle

1. Loi du max

Soit $(X_1, X_{2,}, \dots, X_n)$ un *n*-uplet de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi exponentielle de paramètre m.

Soit $Y = max\,(X_1, X_{2,}, \dots, X_n)$

$F_Y(x) = P[Y < x] = P\big[\,max\,(X_1, X_{2,}, \dots, X_n) < x\big] = P[\; X_1 < x \cap\; X_2 < x \cap\; \dots \cap\; X_n < x]$

Les variables étant indépendantes :

$F_Y(x) = P[\,X_1 < x].P[X_2 < x]\; \dots P[X_n < x]$

Ainsi :

$$\begin{cases} Si\ x < 0, F_Y(x) = 0 \\ \text{Si } x \geq 0, F_Y(x) = (1 - e^{-mx})^n \end{cases}$$

La densité s'obtient en dérivant la fonction de répartition. Ainsi :

$$\begin{cases} Si\ x < 0, f_Y(x) = 0 \\ \text{Si } x \geq 0, f_Y(x) = nm(1 - e^{-mx})^{n-1} \end{cases}$$

2. Loi du min

Soit $(X_1, X_{2,}, \dots, X_n)$ un *n*-uplet de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi exponentielle de paramètre m.

Soit $Y = min\,(X_1, X_{2,}, \dots, X_n)$

$P[Y > x] = P\big[\,min\,(X_1, X_{2,}, \dots, X_n) > x\big] = P[\; X_1 > x \cap\; X_2 > x \cap\; \dots \cap\; X_n > x]$

Les variables étant indépendantes :

$P[Y > x] = P[\,X_1 > x].P[X_2 > x]\; \dots P[X_n > x]$

$P[Y > x]$= $(1 - P[\,X_1 < x]).(1 - P[X_2 < x])\; \dots (1 - P[X_n < x])$

$P[Y > x]$= $(1 - (1 - e^{-mx})^n = e^{-n.m.x}$ si $x \geq 0$ et $P[Y > x]$=0 si $x < 0$

$$\begin{cases} Si\ x < 0, F_Y(x) = 0 \\ \text{Si } x \geq 0, F_Y(x) = 1 - e^{-nmx} \end{cases}$$

La densité s'obtient en dérivant la fonction de répartition. Ainsi :

$$\begin{cases} Si\ x < 0, f_Y(x) = 0 \\ \text{Si } x \geq 0, f_Y(x) = nm.e^{-nmx} \end{cases}$$

3. Loi de $Y = \lfloor X \rfloor + 1$ où X suit une loi exponentielle de paramètre m

Pour mémoire : $P[\lfloor X \rfloor = k] = P[k \leq X < k+1]$

Donc :

$P[Y = k] = P[\lfloor X \rfloor + 1 = k] = P[\lfloor X \rfloor = k-1] = P[k-1 \leq X < k] = F_X(k) - F_X(k-1)$

Ainsi :

$P[Y = k] = 0$ si $k < 0$

$P[Y = k] = 1 - e^{-mk} - 1 + e^{-m(k-1)} = e^{-m(k-1)}.(1 - e^{-m}) = (e^{-m})^{k-1}.(1 - e^{-m})$ si $k \geq 0$

Par conséquent : $Y \rightarrow G(1 - e^{-m})$

4. Loi de $Z = Y - X$ où $Y = \lfloor X \rfloor + 1$ et X suit une loi exponentielle de paramètre m

$P[Z < x] = P[Y - X < x] = P[X > Y - x]$

Cette probabilité dépend des valeurs que peut prendre Y. Or Y suit une loi géométrique ; donc Y prend ses valeurs dans N^*. Et $\sum_{k=1}^{+\infty} = 1$. Donc $([Y = 1], [Y = 2], \dots, [Y = +\infty])$ forment un système complet d'événements ce qui permet d'appliquer la formule des probabilités totales à $[X > Y - x]$:

$$P[Z < x] = P[X > Y - x] = \sum_{k=1}^{+\infty} P[X > Y - x \,/\, Y = k].P\,[Y = k] = \sum_{k=1}^{+\infty} P[X > k - x\,].P\,[Y = k]$$

Ainsi :

$$P[Z < x] = \sum_{k=1}^{+\infty} [1 - \left(1 - e^{-m(k-x)}\right].(e^{-m})^{k-1}.(1 - e^{-m}) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-m(k-x)}(e^{-m})^{k-1}.(1 - e^{-m})$$

$$P[Z < x] = (1 - e^{-m}).e^{m(x+1)} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-2mk} = (1 - e^{-m}).e^{m(x+1)}.\frac{e^{-2m}}{1 - e^{-2m}}$$

$$P[Z < x] = (1 - e^{-m}).e^{m(x+1)}.\frac{e^{-2m}}{(1 - e^{-m})(1 + e^{-m})}$$

Finalement :

$$P[Z < x] = e^{m(x+1)}.\frac{e^{-2m}}{(1 + e^{-m})}$$