

**Théorème des valeurs intermédiaires et théorème de la bijection****1. Théorème des valeurs intermédiaires**

## a. Première formulation

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

## b. Seconde formulation

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  avec  $a < b$ .

$\forall \lambda \in [f(a), f(b)], \exists c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$

NB :  $\exists c$  = il existe au moins un réel « c »

## c. Conséquence

Toute fonction continue qui change de signe sur un intervalle s'annule au moins une fois sur cet intervalle

**2. Théorème de la bijection**

## a. Première formulation

Si une fonction  $f$  est continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ , alors  $f$  définit une bijection de l'intervalle  $I$  sur l'intervalle  $J = f(I)$

## b. Seconde formulation

Si une fonction  $f$  est continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ , alors

$\forall b \in J$ , avec  $J = f(I)$ , l'équation  $f(x) = b$  admet une solution unique sur  $I$

### 3. Exemple

Soit  $f$  définie par  $f(x) = 1 + x + 2e^x, \forall x \in \mathbb{R}$   
 Montrer que  $\exists! \alpha \in [-2, -1], f(x) = 0$

Montrons d'abord l'existence d'au moins un  $\alpha$

On a :

- a.  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$
- b.  $f(-2) = 1 - 2 + 2e^{-2} = -1 + \frac{2}{e^2}$ . Or,  $e > 2 \Rightarrow e^2 > 4 \Rightarrow \frac{1}{e^2} < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2}{e^2} < \frac{1}{2}$   
 Ainsi :  $-1 + \frac{2}{e^2} < -1 + \frac{1}{2}$  soit encore :  $f(-2) < -\frac{1}{2} < 0$
- c.  $f(-1) = 1 - 1 + 2e^{-1} = \frac{2}{e} > 0$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme  $f$  est continue et change de signe sur  $[-2, -1]$ , alors  $f$  s'annule au moins une fois sur cet intervalle.

En d'autres termes,  $\exists \alpha \in [-2, -1]$  tel que  $f(\alpha) = 0$

Montrons maintenant que  $\alpha$  est unique :

$$f'(x) = 1 + 2e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc  $f$  est strictement monotone (croissante) sur  $\mathbb{R}$  et, a fortiori, sur  $[-2, -1]$ .

$f$  est donc bijective de  $I = [-2, -1]$  dans  $J = [f(-2), f(-1)]$

Or  $0 \in [f(-2), f(-1)]$

Par conséquent, d'après le théorème de la bijection,  $\alpha$  est unique