Exemple de suite et solution d'une équation fonctionnelle

Soit f une fonction définie sur R par $f(x) = xe^x$

1. **Montrer que $\forall n \in N^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une seule solution réelle notée u_n**

   $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$
   Ainsi f est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. De plus :
   - f est continue sur $[-1, +\infty[$
   - $f(-1) = -\frac{1}{e} < 0$
   - $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty > 0$

   Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires :
   $\exists u_n \in [-1, +\infty[$ tel que $f(u_n) = n \in N^*$.
   Par ailleurs, f est strictement monotone sur $[-1, +\infty[$. Dans ce cas, u_n est unique

2. **Montrer que $u_n \sim \ln(n)$ au voisinage de l'infini**

Il convient de démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{u_n} = 1$
On ne dispose pas de l'expression de u_n mais on sait, par hypothèse que

$f(u_n) = u_n\, e^{u_n} = n.$

Dès lors, en composant par la fonction ln :

$\ln(u_n) + u_n = \ln(n)$ soit encore, en divisant par u_n : $\frac{\ln(u_n)}{u_n} + 1 = \frac{\ln(n)}{u_n}$
Il suffit alors de démontrer que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$
Pour cela, il importe de connaître : $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Or $f(u_n) = n$ donc $u_n = f^{-1}(n)$ où f^{-1} est la fonction réciproque de f ; f admet bien une fonction réciproque sur $[-1, +\infty[$ car f est strictement monotone sur cet intervalle donc bijective.

Et, on a vu que :

- sur $[-1, +\infty[$, f est croissante donc f^{-1} est également croissante
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$

En remplaçant x par n, on a donc : $\lim_{n\to+\infty} f^{-1}(n) = \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Ainsi : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
Donc : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{u_n} = 1$

Finalement : $u_n \sim \ln(n)$ au voisinage de l'infini

3. Déterminer un équivalent de $u_n - \ln(n)$ au voisinage de l'infini

On sait que $\ln(u_n) + u_n = \ln(n)$. Donc : $u_n - \ln(n) = -\ln(u_n)$

On vient de démontrer que $u_n \sim \ln(n)$ au voisinage de l'infini.

Il convient alors de se demander si $\ln(u_n) \sim \ln(\ln(n))$ au voisinage de l'infini.

Pour cela, calculons :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{\ln(\ln(n))} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n) - \ln(\ln(n)) + \ln(\ln(n))}{\ln(\ln(n))}$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{\ln(\ln(n))} = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{\ln(u_n) - \ln(\ln(n))}{\ln(\ln(n))} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{ln\left[\frac{u_n}{\ln(n)}\right]}{\ln(\ln(n))}$$

Or : $u_n \sim \ln(n) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 1$

Donc : $\lim_{n\to+\infty} ln\left[\frac{u_n}{\ln(n)}\right] = 0$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \ln(\ln(n)) = +\infty$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{ln\left[\frac{u_n}{\ln(n)}\right]}{\ln(\ln(n))} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{\ln(\ln(n))} = 1$$

En d'autres termes :

$\ln(u_n) \sim \ln(\ln(n))$

Or :

$u_n - \ln(n) = -\ln(u_n)$

Finalement :

$u_n - \ln(n) \sim -\ln(\ln(n))$ au voisinage de l'infini