Montrer que F est un sous-espace vectoriel

1. Rappel du théorème à utiliser

F est un sous-espace vectoriel de E si :

1. F est non vide
2. $F \subset E$
3. $\forall (x,y) \in F^2, \forall \lambda \in R, \lambda x + y \in F$

2. Exemples

a. Exemple 1

$\boldsymbol{F = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(R), ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0, (a,b,c) \in R^{*3} \right\}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(R)$

Démonstration

F est non vide car $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$. En effet : $a.0 + b.0 + c.0 = 0$

Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in F$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in F$

Dans ce cas : $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ et $ay_1 + by_2 + cy_3 = 0$

Soit $\lambda \in R$

$$\lambda x + y = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

Montrons que $\lambda x + y \in F$. Il faut donc montrer que :

$a(\lambda x_1 + y_1) + b(\lambda x_2 + y_2) + c(\lambda x_3 + y_3) = 0$z

En remplaçant x par $\lambda x + y$ dans l'expression qui définit F, on a :

$$a(\lambda x_1 + y_1) + b(\lambda x_2 + y_2) + c(\lambda x_3 + y_3) = \lambda(ax_1 + bx_2 + cx_3) + ay_1 + by_2 + cy_3$$

Or :

$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ et $ay_1 + by_2 + cy_3 = 0$.

Donc :

$\lambda(ax_1 + bx_2 + cx_3) + ay_1 + by_2 + cy_3 = 0$

Ainsi : $\lambda x + y \in F$

b. Exemple 2

$$\boldsymbol{F = \left\{M \in \mathcal{M}_{2,1}(R), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} M = \alpha M, \alpha \in R^*\right\}}$$

$F \neq \emptyset$ car $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$. En effet : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Par ailleurs :

- Soit $M \in F$. Dès lors : $M \in \mathcal{M}_{2,1}(R), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} M = \alpha M$
- Soit $N \in F$. Dès lors : $N \in \mathcal{M}_{2,1}(R), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} N = \alpha N$

Montrons que : $\forall \lambda \in R, \lambda M + N \in F$.

Il faut donc montrer que :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(\lambda M + N) = \alpha(\lambda M + N)$$

Partons de la partie droite de l'égalité, développons et aboutissons à la partie droite de l'égalité :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(\lambda M + N) = \lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} M + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} N = \lambda\alpha M + \alpha N = \alpha(\lambda M + N)$$

c. Exemple 3

$$\boldsymbol{F = \left\{M \in \mathcal{M}_n(R), \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} M + M \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = 0\right\}}$$

$F \neq \emptyset$ car $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in F$.

En effet :

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Par ailleurs :

- Soit $M \in F$. Dès lors : $M \in \mathcal{M}_n(R), \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} M + M \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = 0$
- Soit $N \in F$. Dès lors : $N \in \mathcal{M}_n(R), \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} N + N \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = 0$

Montrons que : $\forall \lambda \in R, \lambda M + N \in F$.

Il faut donc montrer que :

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}(\lambda M + N) + (\lambda M + N)\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Partons de la partie droite de l'égalité, développons et aboutissons à la partie droite de l'égalité :

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}(\lambda M + N) + (\lambda M + N)\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$A = \lambda\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} M + \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} N + \lambda M \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + N \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \lambda\left[\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} M + M \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} N + N \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = 0$$

d. Exemple 4

$\boldsymbol{F = \{M \in \mathcal{M}_n(R),\ {}^tM = M\}}$

$F \neq \emptyset$ car $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in F$. En effet : ${}^t\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Par ailleurs :

- Soit $M \in F$. Dès lors : $M \in \mathcal{M}_n(R),\ {}^tM = M$
- Soit $N \in F$. Dès lors : $N \in \mathcal{M}_n(R),\ {}^tN = N$

Montrons que : $\forall \lambda \in R, \lambda M + N \in F$.

Il faut donc montrer que :

${}^t(\lambda M + N) = \lambda M + N$

Partons de la partie droite de l'égalité, développons et aboutissons à la partie droite de l'égalité :

${}^t(\lambda M + N) = {}^t(\lambda M) + {}^t(N) = \lambda\ {}^tM + {}^tN = M + N$

e. Exemple 5

$\boldsymbol{F = \{M \in \mathcal{M}_n(R), AM = MA\}}$

$F \neq \emptyset$ car $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in F$. En effet : $A\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} 0 = 0$

Par ailleurs :

- Soit $M \in F$. Dès lors : $M \in \mathcal{M}_n(R), AM = MA$
- Soit $N \in F$. Dès lors : $N \in \mathcal{M}_n(R), AN = NA$

Montrons que : $\forall \lambda \in R, \lambda M + N \in F$.

Il faut donc montrer que :

$A(\lambda M + N) = (\lambda M + N)A$

Partons de la partie droite de l'égalité, développons et aboutissons à la partie droite de l'égalité :

$A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda MA + NA = (\lambda M + N)A$

f. Exemple 6

$$\boldsymbol{F = \left\{ M \in \mathcal{M}_{n,1}(R), \sum_{k=1}^{n} a_k A^k M = 0, A \in \mathcal{M}_n(R) \right\}}$$

$F \neq \emptyset$ car $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in F$. En effet :

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{a_k A^k} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0$$

– Soit $M \in F$. Dès lors :

$$M \in \mathcal{M}_{n,1}(R), \sum_{k=1}^{n} a_k A^k M = 0, A \in \mathcal{M}_n(R)$$

– Soit $N \in F$. Dès lors :

$$N \in \mathcal{M}_{n,1}(R), \sum_{k=1}^{n} a_k A^k N = 0, A \in \mathcal{M}_n(R)$$

Montrons que : $\forall \lambda \in R, \lambda M + N \in F$. Il faut donc montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k A^k (\lambda M + N) = 0, A \in \mathcal{M}_n(R)$$

Partons de la partie droite de l'égalité, développons et aboutissons à la partie droite de l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k A^k (\lambda M + N) = S$$

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k A^k (\lambda M) + \sum_{k=1}^{n} a_k A^k N = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k A^k M + \sum_{k=1}^{n} a_k A^k N = 0$$