

### Conclusions à tirer d'un résultat égal au vecteur nul de $E$ ou à 0

#### 1. $\text{Ker}(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow f$ est injective

*Ce théorème est au programme. Il peut donc être admis*

#### 2. 0 est valeur propre de $f$

##### a. 0 est valeur propre de $f \Leftrightarrow f$ est non inversible

*Ce théorème est au programme. Il peut donc être admis. En voici toutefois la démonstration :*

$$\lambda = 0 \text{ est valeur propre de } f \Leftrightarrow \exists x \in E, x \neq 0_E, f(x) = 0. x = 0_E$$

Dans ce cas :  $x \in \text{Ker}(f)$ . Or, par hypothèse :  $x \neq 0_E$ . Donc :

$\text{Ker}(f) \neq \{0_E\}$ . Ainsi :  $f$  est non injective, donc  $f$  est non bijective.

Par conséquent,  $f$  est non inversible.

##### b. 0 est valeur propre de $f \Rightarrow E_0 = \text{Ker}(f)$

$$\lambda = 0 \text{ est valeur propre de } f \Leftrightarrow \exists x \in E, x \neq 0_E, f(x) = 0. x = 0_E$$

Dans ce cas :  $x \in \text{Ker}(f)$ .

Donc :  $E_0 = \text{Ker}(f)$

#### 3. $\text{Ker}(f) \neq \{0_E\} \Rightarrow 0 \in \text{Sp}(f)$

$$x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \exists x \in E, x \neq 0_E, f(x) = 0 = 0. x \text{ car } x \neq 0_E.$$

Donc  $\lambda = 0$  est valeur propre de  $f$ .

En d'autres termes :  $0 \in \text{Sp}(f)$

✓