

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

1. Réduction des endomorphismes

a. Valeurs propres

i. Définition

λ est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(R)$ si $\exists X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(R)/AX = \lambda X$

L'ensemble $\text{sp}(A)$ des valeurs propres de A est le spectre de A

ii. Mode de détermination

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow AX - \lambda X = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0$$

$X = 0$ est solution évidente de cette équation.

Mais, comme X ne doit pas être égal au vecteur colonne nul, il convient que cette équation admette d'autres solutions.

Donc λ est valeur propre de A si la matrice $A - \lambda I$ est non inversible.

iii. Propriétés

Les valeurs propres d'une matrice diagonale sont ses coefficients diagonaux.

La matrice A est inversible si 0 n'est pas valeur propre de A .

$\forall A \in \mathcal{M}_n(R)$, A admet au plus n valeurs propres

b. Vecteurs propres

Le vecteur propre de $A \in \mathcal{M}_n(R)$ est $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(R)/AX = \lambda X$

c. Sous-espaces vectoriels propres d'un endomorphisme

i. Définition

Le sous-espace propre d'un endomorphisme (ou de sa matrice A), associé à la valeur propre λ , est l'ensemble $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(R)/AX = \lambda X\}$

ii. Propriétés

$E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(R)$

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(R)/(A - \lambda I)X = 0\}$$

$E_\lambda(A)$ est formé de tous les vecteurs propres de A associés à λ auquel on adjoint le vecteur nul. Un sous-espace propre contient donc toujours au moins le vecteur nul mais il n'est jamais réduit à $\{0\}$ par définition.

d. Spectre $\text{Sp}(f)$ d'un endomorphisme f de E , tel que $\dim E = n$

i. Définitions

λ est valeur propre de f si $\exists x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$.

L'ensemble $\text{sp}(f)$ des valeurs propres de f est le spectre de f .

Le vecteur propre associé à la valeur propre λ est $x \neq 0$ tel que : $f(x) = \lambda x$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est l'ensemble $E_\lambda(f)$ de tous les vecteurs x tels que : $f(x) = \lambda x$

ii. Propriétés

$E_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel de E

$$E_\lambda(f) = \text{Ker}(f - \lambda I_E)$$

$E_\lambda(f)$ est formé de tous les vecteurs propres de f associés à λ auquel on adjoint le vecteur nul. Un sous-espace propre contient donc toujours au moins le vecteur nul mais il n'est jamais réduit à $\{0_E\}$ par définition.

λ est valeur propre de f si $f - \lambda I_E$ n'est pas injectif.

Comme E est de dimension finie, tout endomorphisme injectif de E est bijectif

Dès lors, λ est valeur propre de f si $f - \lambda I_E$ n'est pas bijectif.

Cas particulier : 0 est valeur propre de f si f n'est pas bijectif.

Conclusion : f est bijectif si 0 n'est pas valeur propre de f .

f admet au plus n valeurs propres

$$\forall p \leq n, \sum_{i=1}^p \dim E_{\lambda_i}(f) \leq n$$

e. Concaténation de familles libres de sous-espaces propres

- i. Une concaténation (ou une juxtaposition) de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs λ à λ distinctes forme une famille libre de E
- ii. En particulier, une famille de vecteurs propres (x_1, x_2, \dots, x_n) associés à des valeurs propres $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ à λ distinctes est une famille libre

f. Polynôme annulateur

Si Q est un polynôme annulateur de f , toute valeur propre de f est racine de Q

g. Conditions pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable

- i. Un endomorphisme f de E est diagonalisable s'il existe une base E formée de vecteurs propres de f
- ii. Condition suffisante : tout endomorphisme f d'un espace vectoriel de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable
- iii. Condition nécessaire : un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n

2. Réduction des matrices carrées

a. Matrice carrée diagonalisable

- i. Une matrice est diagonalisable s'il existe une base \mathcal{B}' de E dans laquelle sa matrice est diagonale.
- ii. Une matrice carrée A d'ordre n est diagonalisable s'il existe une matrice D , diagonale, et une matrice P , inversible telles que : $D = P^{-1}AP$ avec
 - $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$;
 - D = matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$
 - $\mathcal{B}' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ = base de E formée des vecteurs propres associés aux valeurs propres $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$;
 - P = matrice de passage $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}'

Les colonnes de P forment une base de $M_{n,1}(R)$ constituée de valeurs propres de A

- iii. Condition suffisante : toute matrice carrée A d'ordre n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable

Dans ce cas, les sous-espaces propres de A sont de dimension 1

- iv. Condition nécessaire : une matrice d'ordre n est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n
- v. Toute matrice symétrique est diagonalisable

b. Exemples de calculs de puissances n-ièmes d'une matrice carrée