

Rappels de première année sur la convergence des suites

1. Utilisation du théorème des encadrements

a. Rappel du théorème

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$

b. Exemple

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$$

Le premier terme de la somme – et le plus grand – est $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

Le dernier terme de la somme – et le plus petit – est $\frac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}}$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n + 1}} \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n + 1}} \sum_{k=1}^{2n+1} 1 \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} \sum_{k=1}^{2n+1} 1$$

$$\frac{2n + 1}{\sqrt{n^2 + 2n + 1}} \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \leq \frac{2n + 1}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

Une fonction rationnelle est équivalente, au voisinage de l'infini, au rapport de ses termes de plus haut degré. Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n + 1}{\sqrt{n^2 + 2n + 1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n + 1}{\sqrt{n^2 + 1}} = 2$$

Finalement, par théorème des encadrements :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} = 2$$

2. Utilisation du télescopage

a. Principe

$$\sum_{k=0}^n u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_0$$

b. Exemple

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

On se propose de commencer par déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$$

pour en déduire S_n avant de calculer sa limite quand n tend vers l'infini

- Détermination de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} = \frac{a(k+1)(k+2) + bk(k+2) + ck(k+1)}{k(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} = \frac{(a+b+c)k^2 + (3a+2b+c)k + 2a}{k(k+1)(k+2)}$$

Par identification :

$$2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$a + b + c = 0 \Leftrightarrow b + c = -\frac{1}{2}$$

$$3a + 2b + c = 0 \Leftrightarrow 2b + c = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Ainsi : } b = -1 \text{ et } c = \frac{1}{2}$$

Finalement :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}$$

- Calcul de S_n

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}$$

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+2)}$$

Posons :

- Pour la deuxième somme : $u = k + 1$
Si $k = 1$ alors $u = 2$
Si $k = n$ alors $u = n + 1$
- Pour la troisième somme : $u = k + 2$
Si $k = 1$ alors $u = 3$
Si $k = n$ alors $u = n + 2$

Et remplaçons u par k :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} \right) - \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{2} - \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} = 0$$

Ainsi :

$$S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$$

Finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{4}$$

3. Utilisation du théorème des suites monotones

a. Rappel du théorème

Toute suite croissante et majorée est convergente

Toute suite décroissante et minorée est convergente

b. Exemple

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

- Sens de variation de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n^2} > 0$$

Finalement :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

- Détermination d'un majorant

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^2 - k + k} = \frac{1}{k(k-1) + k} \leq \frac{1}{k(k-1)}$$

Or, il est possible de déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-1}$$

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k-1} = \frac{a(k-1) + bk}{k(k-1)} = \frac{(a+b)k - a}{k(k-1)}$$

Par identification :

$$-a = 1 \text{ donc } a = -1$$

$$a + b = 0 \text{ donc } b = 1$$

Ainsi :

$$\frac{1}{k(k-1)} = -\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1}$$

Dès lors :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} = 1 - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1}$$

Posons, pour la deuxième somme :

$$u = k - 1$$

Si $k = 2$ alors $u = 1$

Si $k = n$ alors $u = n - 1$

Et remplaçons u par k

Dès lors :

$$u_n = 1 - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = 1 - \left(\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \right) + 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2$$

Finalement :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par 2. Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, elle est convergente.

4. Utilisation du théorème des suites adjacentes

a. Rappel du théorème

Deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes si

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante
- $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Dans ce cas :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$
- $u_n \leq l \leq v_n$

b. Exemple

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

On peut montrer que $\frac{5}{4} \leq l \leq \frac{7}{4}$

- Sens de variation de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

Finalement :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

- Sens de variation de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n + n^2 + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$$

Finalement :

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0$$

Finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$$

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc adjacentes et convergent ainsi vers la même limite. Soit l leur limite.

- Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante : $u_n \leq l \leq v_n$

Pour $n = 2$:

$$u_2 \leq l \leq v_2 \Leftrightarrow \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} \leq l \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}$$

Finalement :

$$\frac{5}{4} \leq l \leq \frac{7}{4}$$