Etude d'un projecteur f c'est-à-dire d'une application linéaire f telle que $\boldsymbol{fof = f}$

Soit f un endomorphisme de $\boldsymbol{R^3}$ défini par :

$$\boldsymbol{f(x,y,z) = \frac{1}{2}(x+y+z, 2y, x-y+z)}$$

1. **Montrer que f est un projecteur**

$$fof(x) = f[f(x)] = f\left[\frac{1}{2}(x+y+z, 2y, x-y+z)\right] = \frac{1}{2}f(x+y+z, 2y, x-y+z)$$

$$fof(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}(x+y+z+2y+x-y+z, 4y, x+y+z-2y+x-y+z)$$

$fof(x) = \frac{1}{2}(x+y+z, 2y, x-y-z) = f$. Donc f est un projecteur

2. **Déterminer Ker f**

$$(x,y,z) \in Ker(f) \Leftrightarrow f(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

$$(x,y,z) \in Ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$$

$$(x,y,z) \in Ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x=x \\ y=0 \\ z=-x \end{cases}$$

Ainsi : $Ker(f) = Vect((1,0,-1)$

3. **Déterminer Im f**

$Im(f) = Vect(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)$

$Im(f) = Vect((1,01), (1,2,-1), (1,0,1) = Vect((1,01), (1,2,-1))$

4. **Démontrer que $\boldsymbol{\mathcal{F} = ((1,0,-1), (1,01), (1,2,-1))}$ est une base de $\boldsymbol{R^3}$**

- Montrons d'abord que $\mathcal{F}$ est une famille libre. Pour cela, considérons :

$$a(1,0,-1) + b(1,01) + c(1,2,-1) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ 2c=0 \\ -a+b-c=0 \end{cases}$$

Le système peut encore s'écrire :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ -a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$ Donc $\mathcal{F}$ est une famille libre.

- Montrons maintenant que $\mathcal{F}$ est une base. C'est le cas car Card $\mathcal{F} = 3 = \dim R^3$