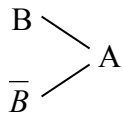


PROBABILITES TOTALES

1. Principe

Il s'agit de calculer la probabilité de réalisation d'un événement A précédé de la réalisation soit d'un événement B soit de son contraire noté \bar{B} . Comme il est, par hypothèse, certain que soit B soit \bar{B} a été préalablement réalisé, on peut écrire : $P(B \text{ ou } \bar{B})=1$.

On a alors tendance à noter :



$$P(A) = P[(B \cap A) \cup (\bar{B} \cap A)]$$

NB : $P(A \cup B)$ se lit $P(A \text{ ou } B)$. Il s'agit de la probabilité de réalisation soit de l'événement A, soit de l'événement B.

On utilisera par la suite $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A) = P(B \cap A) + P(\bar{B} \cap A) - P(B \cap A \cap \bar{B} \cap A)$. Or, il est impossible qu'un événement et son contraire (en l'occurrence B et \bar{B}) soient simultanément réalisés ; donc $P(B \cap A \cap \bar{B} \cap A) = 0$ d'où :

$$P(A) = P(B \cap A) + P(\bar{B} \cap A).$$

Or, d'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ donc } P(B \cap A) = P(A \cap B) = P(A/B).P(B)$$

Enfin en remplaçant B par \bar{B} , la formule de la ligne précédente devient :

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A/\bar{B}).P(\bar{B})$$

Finalement :

$$P(A) = P(A/B).P(B) + P(A/\bar{B}).P(\bar{B})$$

$$\text{avec } P(B) + P(\bar{B}) = 1$$

NB : on a vu précédemment que : $P(B \text{ ou } \bar{B})=1$ ce qui revient à écrire :

$P(B) + P(\bar{B}) - P(B \cap \bar{B}) = 1$. Or il est par principe qu'un événement et son contraire soient simultanément réalisés. Donc $P(B \cap \bar{B}) = 0$ et par conséquent $P(B) + P(\bar{B}) = 1$.

On peut généraliser cette formule à l'hypothèse dans laquelle A est précédé de la réalisation d'un événement B_i choisi au hasard parmi n événements incompatibles B_1, B_2, \dots, B_n .

Ainsi : $\sum_{i=1}^n P(B_i) = 1$ donc le n -uplet (B_1, B_2, \dots, B_n) forme un système complet d'événements. Il est alors possible d'appliquer à A la formule des probabilités totales.

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A/B_i) \cdot P(B_i)$$

En revenant à la formule des probabilités conjointes :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i)$$

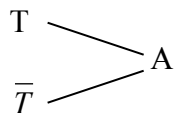
Et dans l'hypothèse d'un système complet formé d'un nombre infini d'événements ($\sum_{i=1}^{+\infty} P(B_i) = 1$) :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A/B_i) \cdot P(B_i)$$

2. Exemple 1 introductif

On choisit un individu dans une population contenant une proportion p de tricheurs. On demande alors à l'individu choisi de lancer un dé. S'il est tricheur, il est certain d'obtenir 6. Quelle est la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans cette population obtienne 6 ?

Soit A l'événement dont on recherche la probabilité de réalisation à savoir : « obtenir 6 ». La réalisation de cet événement dépend du choix préalable – au hasard – de l'individu qui est soit tricheur (événement qui sera noté T), soit honnête (événement contraire noté \bar{T}).



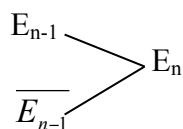
D'après la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(A/T)P(T) + P(A/\bar{T}) \cdot P(\bar{T}) = 1 \cdot p + 1/6 \cdot (1-p) = 5/6p + 1/6.$$

3. Première approche des TRES CLASSIQUES chaînes de Markov

La formule des probabilités totales trouve son application dans les cas où l'on recherche la probabilité d'un événement dont la réalisation est précédée d'un autre événement choisi au hasard parmi plusieurs événements incompatibles. Cette formule est particulièrement utile lorsque l'on recherche la probabilité de réalisation d'un événement à la date n (noté E_n) et que celle-ci dépend de la réalisation de ce même événement à la date $n-1$ (noté alors E_{n-1}). En d'autres termes, on suppose que si l'événement s'est produit à la date $n-1$, alors il a une probabilité a de se reproduire à la date n et si il ne s'est pas produit à la date $n-1$, il a une probabilité b de se produire à la date n .

On peut alors écrire :



En notant $P(E_n) = p_n$ donc $P(E_{n-1}) = p_{n-1}$ et $P(\overline{E_{n-1}}) = 1 - P(E_{n-1}) = 1 - p_{n-1}$. Avec ces notations, en appliquant la formule des probabilités totales, on a :

$$P(E_n) = P(E_n / E_{n-1}) \cdot P(E_{n-1}) + P(E_n / \overline{E_{n-1}}) \cdot P(\overline{E_{n-1}}).$$

Soit $a = P(E_n / E_{n-1})$ et $b = P(E_n / \overline{E_{n-1}})$, a et b étant fournis par l'énoncé. Dès lors :

$$p_n = ap_{n-1} + b(1 - p_{n-1}) \quad (\text{équation 1}), \text{ soit encore : } p_n = (a-b)p_{n-1} + b$$

On reconnaît une suite arithmético-géométrique ce qui permet d'en déduire p_n en fonction de n :

$$p_n = (a-b)^n \left(p_0 - \frac{b}{1-(a-b)} \right) + \frac{b}{1-(a-b)} = (a-b)^n \left(p_0 - \frac{b}{1-a+b} \right) + \frac{b}{1-a+b}.$$

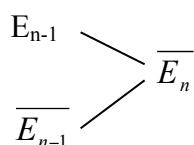
Si p_1 est le premier terme alors :

$$p_n = (a-b)^{n-1} \left(p_1 - \frac{b}{1-a+b} \right) + \frac{b}{1-a+b}.$$

Ce type de problème peut également se formaliser matriciellement.

Il suffit alors de poser $q_n = P(\overline{E_n})$ et d'exprimer q_n en fonction de q_{n-1} de la même façon que l'on a précédemment exprimé p_n en fonction de p_{n-1} .

On peut écrire :



Comme on sait que $P(E_{n-1}) + P(\overline{E_{n-1}}) = 1$, appliquons à $\overline{E_n}$ la formule des probabilités totales :

$$P(\overline{E_n}) = P(\overline{E_n} / E_{n-1}) P(E_{n-1}) + P(\overline{E_n} / \overline{E_{n-1}}) P(\overline{E_{n-1}}) \text{ soit :}$$

$$q_n = (1-a)p_{n-1} + (1-b)q_{n-1} \quad (\text{équation 2})$$

- On peut remplacer p_{n-1} par $1-q_{n-1}$ et revenir à une suite arithmético-géométrique comme dans le cas de p_n : $q_n = (1-a)(1-q_{n-1}) + (1-b)q_{n-1} = (1-b-1+a)q_{n-1} + 1-a = (a-b)q_{n-1} + 1-a$ donc :

$$q_n = (a-b)^n \left(q_0 - \frac{1-a}{1-a+b} \right) + \frac{1-a}{1-a+b}$$

- On peut également réunir les équations 1 et 2 sous forme d'un système linéaire :

$$\begin{cases} p_n = ap_{n-1} + bq_{n-1} \\ q_n = (1-a)p_{n-1} + (1-b)q_{n-1} \end{cases}$$

soit, matriciellement :

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix}$$

On a une expression du type : $A_n = XA_{n-1}$. Il s'agit donc d'une suite géométrique d'où :

$A_n = X^n A_0$. Il convient alors de calculer, en diagonalisant $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$, sa puissance n-ième

4. Exemple 2

On constate que si le cours d'une action monte au cours d'une séance boursière, il a 80% de chances de continuer à monter le lendemain. En revanche, si il baisse au cours d'une séance, il a 30% de chances de monter le lendemain.

Soit p_n la probabilité de hausse du cours le jour n et soit p_1 la probabilité de hausse du cours à l'issue de la première séance de cotation (jour de l'introduction en bourse).

1°) Exprimer p_n en fonction de p_{n-1}

2°) En déduire p_n en fonction de p_1 et de n

3°) On pose q_n = probabilité de baisse du cours le n-ième jour. Exprimer q_n en fonction de q_{n-1} et de p_{n-1} .

4°) En déduire une représentation matricielle des expressions de p_n et de q_n

1°) Soit M_n = « le cours de l'action monte le n-ième jour » et \overline{M}_n l'événement contraire (à savoir « le cours baisse le n-ième jour »). On peut écrire :

$$\begin{array}{c} M_{n-1} \\ \overline{M}_{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} M_n$$

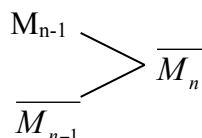
Chaque jour, soit le cours de l'action monte, soit il baisse ; donc M_n est nécessairement précédé soit de M_{n-1} soit de \overline{M}_{n-1} . On peut alors écrire : $P(M_{n-1}) + P(\overline{M}_{n-1}) = 1$ ce qui permet d'appliquer à M_n la formule des probabilités totales :

$P(M_n) = P(M_n/M_{n-1})P(M_{n-1}) + P(M_n/\overline{M}_{n-1})P(\overline{M}_{n-1})$ soit :

$p_n = 0,8p_{n-1} + 0,3(1-p_{n-1})$ (équation 1) soit encore : $p_n = 0,5p_{n-1} + 0,3$.

2°) $p_n = 0,5p_{n-1} + 0,3$ est une suite arithmético-géométrique donc : $p_n = 0,5^{n-1}(p_1 - \frac{0,3}{1-0,5}) + \frac{0,3}{1-0,5}$
soit finalement : $p_n = 0,5^{n-1}(p_1 - 0,6) + 0,6$.

3°) On s'intéresse désormais à $P(\overline{M}_n)$. La baisse du cours le n-ième jour est précédée, la veille, soit de la hausse soit de la baisse. On peut alors écrire comme précédemment :



avec $P(M_{n-1}) + P(\overline{M}_{n-1}) = 1$, ce qui permet d'appliquer à \overline{M}_n la formule des probabilités totales :

$P(\overline{M}_n) = P(\overline{M}_n / M_{n-1})P(M_{n-1}) + P(\overline{M}_n / \overline{M}_{n-1})P(\overline{M}_{n-1})$ soit :
 $q_n = 0,2p_{n-1} + 0,7q_{n-1}$ (équation 2).

En reprenant les équations 1 et 2 sous forme d'un système linéaire :

$$\begin{cases} p_n = 0,8p_{n-1} + 0,3q_{n-1} \\ q_n = 0,2p_{n-1} + 0,7q_{n-1} \end{cases}$$

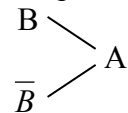
soit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix}$$

5. Formule de Bayes

a. Principe

La formule de Bayes permet de calculer $P(B/A)$ où B est l'un des deux événements (avec \overline{B} tel que $P(B) + P(\overline{B}) = 1$) ayant précédé A :



On sait, d'après la formule des probabilités conditionnelles que :

$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A)}$. En appliquant à A la formule des probabilités totales :

$$P(B/A) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A/B).P(B) + P(A/\overline{B}).P(\overline{B})} \text{ avec } P(B) + P(\overline{B}) = 1$$

b. Exemple

Dans un pays gravement touché par une épidémie (30% de la population est contaminée), on utilise un test de dépistage de la maladie.

On a constaté que si le test réagit positivement sur un individu, celui-ci a 90% de chances d'être malade ; si le test réagit négativement, l'individu a 80% de chances d'être en bonne santé.

On choisit au hasard une personne dans la population du pays et on lui administre le test. Celui-ci réagit positivement.

Quelle est la probabilité que l'individu soit malade ?

Soit B = « l'individu choisi est malade » et \bar{B} l'événement contraire permettant d'écrire que : $P(B) + P(\bar{B}) = 1$.

Soit A = « le test réagit positivement ».

On cherche $P(B/A)$. D'après la formule de Bayes :

$$P(B/A) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A/B).P(B) + P(A/\bar{B}).P(\bar{B})} = \frac{0,9 \times 0,3}{(0,9 \times 0,3) + (0,1 \times 0,7)} = \frac{0,27}{0,27 + 0,07} = \frac{27}{34}$$