

Pratique de la diagonalisation des matrices carrées

1. Rappels de cours

a. Valeurs propres

λ est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(R)$ si $\exists X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(R)/AX = \lambda X$

Donc λ est valeur propre de A si la matrice $A - \lambda I$ est non inversible.

Les valeurs propres d'une matrice diagonale sont ses coefficients diagonaux.

La matrice A est inversible si 0 n'est pas valeur propre de A .

$\forall A \in \mathcal{M}_n(R)$, A admet au plus n valeurs propres

b. Vecteurs propres

Le vecteur propre de $A \in \mathcal{M}_n(R)$ est $X \neq 0, X \in \mathcal{M}_{n,1}(R)/AX = \lambda X$

c. Sous-espaces vectoriels propres d'un endomorphisme

Le sous-espace propre d'un endomorphisme (ou de sa matrice A), associé à la valeur propre λ , est l'ensemble $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(R)/AX = \lambda X\}$

$E_\lambda(A)$ est formé de tous les vecteurs propres de A associés à λ auquel on adjoint le vecteur nul. Un sous-espace propre contient donc toujours au moins le vecteur nul mais il n'est jamais réduit à $\{0\}$ par définition.

d. Matrice carrée diagonalisable

Une matrice est diagonalisable s'il existe une base \mathcal{B}' de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

Une matrice carrée A d'ordre n est diagonalisable s'il existe une matrice D , diagonale, et une matrice P , inversible telles que : $D = P^{-1}AP$ avec

- $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$;
- $D =$ matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$
- $\mathcal{B}' = (x_1, x_2, \dots, x_n) =$ base de E formée des vecteurs propres associés aux valeurs propres $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$;
- $P =$ matrice de passage $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}'

Les colonnes de P forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(R)$ constituée de valeurs propres de A

Condition suffisante : toute matrice carrée A d'ordre n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable. Dans ce cas, les sous-espaces propres de A sont de dimension 1

Condition nécessaire et suffisante : une matrice d'ordre n est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n

Toute matrice symétrique est diagonalisable

2. Aspects pratiques

- Pour déterminer les valeurs propres, c'est-à-dire pour déterminer les valeurs de λ pour lesquelles $A - \lambda I$ est non inversible, on transforme la matrice $A - \lambda I$ en une matrice triangulaire par la méthode du pivot de Gauss. Dans ce contexte, **il convient de ne pas multiplier la ligne que l'on transforme par un coefficient qui contient λ .**
- Pour déterminer les vecteurs propres, on revient à la matrice $A - \lambda I$ et on y remplace successivement λ par chacune des valeurs propres précédemment obtenues
- Pour vérifier que la matrice est diagonalisable, 3 propriétés peuvent être utilisées
 - On constate que la matrice est symétrique
 - On constate que le nombre de valeurs propres est égal à l'ordre de la matrice
 - On détermine la dimension de chaque sous-espace vectoriel propre associé à chacune des valeurs propres. Pour cela, il convient de s'assurer, pour chaque sous-espace vectoriel propre, que les vecteurs propres qui le composent forment une base.
 - Ils constituent une famille génératrice car, écrits sous forme de *Vect*, ils permettent de dire que chaque sous-espace vectoriel propre est engendré par la famille composée des vecteurs propres.
 - Pour démontrer que les vecteurs propres associés à une valeur propres forment une famille libre :
 - Si la famille est constituée d'un seul vecteur propre et qu'il est différent du vecteur nul, alors la famille est libre
 - Si la famille est constituée de 2 vecteurs propres non colinéaires, alors la famille est libre
 - Si la famille de vecteurs propres (x_1, x_2, \dots, x_n) est constituée de plus de 2 éléments, il faut démontrer que :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

3. Diagonalisation d'une matrice d'ordre 2

Soit : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

A est symétrique donc diagonalisable

- Détermination des valeurs propres

Pour cela déterminons les valeurs de λ pour lesquelles $A - \lambda I$ est non inversible

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ b & a - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ b & a - \lambda \end{pmatrix}$$

Si on laisse $A - \lambda I$ sous cette forme, pour rendre cette matrice triangulaire, il conviendrait de remplacer L_2 par : $bL_1 - (a - \lambda)L_2$. Mais dans ce cas, on multiplie la ligne L_2 que l'on transforme par le coefficient $(a - \lambda)$ qui contient λ . Pour éviter cette situation, il convient d'inverser le positionnement des 2 lignes de la matrice $A - \lambda I$:

$$\begin{matrix} L'_1 \\ L'_2 \end{matrix} = \begin{matrix} L_2 \\ L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} b & a - \lambda \\ a - \lambda & b \end{pmatrix}$$

$$L''_2 = (a - \lambda)L'_1 - bL'_2 = \begin{pmatrix} b & a - \lambda \\ 0 & (a - \lambda)^2 - b^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L'_1 \\ L''_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} b & a - \lambda \\ 0 & (a - \lambda - b)(a - \lambda + b) \end{pmatrix}$$

Ainsi, cette réduite de Gauss est non inversible si :

$$\begin{cases} a - \lambda - b = 0 \\ \text{ou} : a - \lambda + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = a - b \\ \text{ou} : \lambda = a + b \end{cases}$$

Ainsi :

$$Sp(A) = \{a - b, a + b\}$$

A est une matrice d'ordre 2 qui a 2 valeurs propres. Elle est donc bien diagonalisable

- Détermination des vecteurs propres et sous-espaces vectoriels propres

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A si $X \neq 0$ et :

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ b & a - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} (a - \lambda)x + by = 0 \\ bx + (a - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

- 1^{er} cas : $\lambda = a - b$.

Dès lors, le système devient :

$$\begin{cases} (a - a + b)x + by = 0 \\ bx + (a - a + b)y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} bx + by = 0 \\ bx + by = 0 \end{cases}$$

$$x + y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi le sous-espace vectoriel propre $E_{a-b}(A)$ associé à la valeur propre $\lambda = a - b$ est :

$$E_{a-b}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

E_{a-b} est donc engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Par conséquent $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ forme une famille génératrice. Par ailleurs, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ forme une famille libre. On en déduit que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E_{a-b} . Finalement : $\dim E_{a-b} = 1$

- 2^{ème} cas : $\lambda = a + b$.

Dès lors, le système devient :

$$\begin{cases} (a - a - b)x + by = 0 \\ bx + (a - a - b)y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -bx + by = 0 \\ bx - by = 0 \end{cases}$$

$$x - y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi le sous-espace vectoriel propre $E_{a+b}(A)$ associé à la valeur propre $\lambda = a + b$ est :

$$E_{a+b}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

E_{a+b} est donc engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Par conséquent $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forme une famille génératrice. Par ailleurs, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forme une famille libre. On en déduit que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E_{a+b} . Finalement : $\dim E_{a+b} = 1$

Finalement : $\dim E_{a-b} + \dim E_{a+b} = 1 + 1 = 2 =$ ordre de la matrice. A est donc bien diagonalisable.

On alors :

$$D = \begin{pmatrix} a - b & 0 \\ 0 & a + b \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il est alors possible de déterminer P^{-1} pour en déduire A^n .

$$\text{On sait que : } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \text{ Donc : } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Or : $A^n = PD^nP^{-1}$. Cette propriété, $P(n)$ se démontre par récurrence.

Initialisation : pour $n = 0, A^0 = PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$

Donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : supposons que $P(n)$ est vraie. Démontrons que, dans ce cas, $P(n+1)$ est vraie aussi c'est-à-dire que : $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

Partons de $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que : $A^n = PD^nP^{-1}$.

Dans ce cas :

$$A^{n+1} = A^n A = PD^nP^{-1}A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nIDP^{-1} = PD^nDP^{-1}$$

$$A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

La propriété $P(n+1)$ donc vraie ce qui achève la preuve.

Ainsi :

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a-b)^n & 0 \\ 0 & (a+b)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a-b)^n & -(a-b)^n \\ (a+b)^n & (a+b)^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (a-b)^n + (a+b)^n & (a+b)^n - (a-b)^n \\ (a+b)^n - (a-b)^n & (a-b)^n + (a+b)^n \end{pmatrix}$$

4. Diagonalisation d'une matrice d'ordre 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

- Détermination des valeurs propres

Pour cela déterminons les valeurs de λ pour lesquelles $A - \lambda I$ est non inversible

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1 - \lambda & 2 \\ -2 & -2 & 5 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1 - \lambda & 2 \\ -2 & -2 & 5 - \lambda \end{pmatrix}$$

Si on laisse $A - \lambda I$ sous cette forme, pour rendre cette matrice triangulaire, il convient de remplacer L_2 par : $2L_1 + (1 - \lambda)L_2$. Mais dans ce cas, on multiplie la ligne L_2 que l'on transforme par le coefficient $(1 - \lambda)$ qui contient λ . Pour éviter cette situation, il convient d'inverser le positionnement des 2 premières lignes de la matrice $A - \lambda I$:

$$\begin{matrix} L'_1 \\ L'_2 \\ L'_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 - \lambda & 2 \\ 1 - \lambda & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 5 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L'_1 \\ L''_2 = 2L'_2 + (1 - \lambda)L'_1 \\ L'_3 = L'_3 - L'_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 - \lambda & 2 \\ 0 & -4 + (1 - \lambda)^2 & 4 + 2(1 - \lambda) \\ 0 & \lambda - 3 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L'_1 \\ L''_2 \\ L'_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 - \lambda & 2 \\ 0 & (\lambda - 3)(\lambda + 1) & 2(3 - \lambda) \\ 0 & \lambda - 3 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$$

Si on laisse la matrice sous cette forme, pour la rendre triangulaire, il convient de remplacer L'_3 par : $(\lambda + 1)L'_3 - L''_2$. Mais dans ce cas, on multiplie la ligne L_3 que l'on transforme par le coefficient $(\lambda + 1)$ qui contient λ . Pour éviter cette situation, il convient d'inverser le positionnement des 2 dernières lignes de la matrice :

$$\begin{matrix} L'_1 \\ L'''_2 \\ L''_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 - \lambda & 2 \\ 0 & \lambda - 3 & 3 - \lambda \\ 0 & (\lambda - 3)(\lambda + 1) & 2(3 - \lambda) \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L'_1 \\ L'''_2 \\ L'''_3 = (\lambda + 1)L'''_2 - L''_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 - \lambda & 2 \\ 0 & \lambda - 3 & 3 - \lambda \\ 0 & 0 & (3 - \lambda)(\lambda + 1) - 2(3 - \lambda) \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L'_1 \\ L'''_2 \\ L'''_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 - \lambda & 2 \\ 0 & \lambda - 3 & 3 - \lambda \\ 0 & 0 & 3\lambda + 3 - \lambda^2 - \lambda - 6 + 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L'_1 \\ L'''_2 \\ L'''_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} -2 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & \lambda-3 & 3-\lambda \\ 0 & 0 & 3\lambda+3-\lambda^2-\lambda-6+2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L'_1 \\ L'''_2 \\ L'''_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} -2 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & \lambda-3 & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2+4\lambda-3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L'_1 \\ L'''_2 \\ L'''_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} -2 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & \lambda-3 & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda-1)(\lambda-3) \end{pmatrix}$$

Ainsi : $Sp(A) = \{1, 3\}$

- Détermination des vecteurs propres et sous-espaces vectoriels propres

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A si $X \neq 0$ et :

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ -2 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x - 2y + 2z = 0 \\ -2x + (1-\lambda)y + 2z = 0 \\ -2x - 2y + (5-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

- 1^{er} cas : $\lambda = 1$.

Dès lors, le système devient :

$$\begin{cases} -2y + 2z = 0 \\ -2x + 2z = 0 \\ -2x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ x - z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = z \\ y = z \\ 2z - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = z \\ y = z \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi le sous-espace vectoriel propre $E_1(A)$ associé à la valeur propre $\lambda = 1$ est :

$$E_1(A) = Vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

E_1 est donc engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Par conséquent $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forme une famille génératrice. Par ailleurs, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forme une famille libre. On en déduit que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E_1 . Finalement : $\dim E_1 = 1$

- 2^{ème} cas : $\lambda = 3$.

Dès lors, le système devient :

$$\begin{cases} -2x - 2y + 2z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Ce qui revient à $x + y + z = 0$ et qui s'écrit, sous la forme de la représentation paramétrique ci-dessous :

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi le sous-espace vectoriel propre $E_3(A)$ associé à la valeur propre $\lambda = 3$ est :

$$E_3(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

E_3 est donc engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Par conséquent $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

est une famille génératrice. Par ailleurs, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires. Ainsi,

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre. On en déduit que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E_3 .

Finalement : $\dim E_3 = 2$ et $\dim E_1 + \dim E_3 = 1 + 2 = 3 = \text{ordre de la matrice } A$ est donc bien diagonalisable.

$$\text{On a donc : } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$