

Poisson – Poisson

Soit $X \hookrightarrow P(\lambda)$ et $\lambda \hookrightarrow P(\mu)$

1. Détermination de la loi de X

$$\lambda \hookrightarrow P(\mu) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda(\Omega) = N \\ P[\lambda = i] = e^{-\mu} \frac{\mu^i}{i!} \end{cases}$$

La valeur de $P[X = k]$ dépend de la valeur prise par le paramètre λ .

Comme $\lambda(\Omega) = N$, λ peut prendre les valeurs :

$$[\lambda = 0]$$

$$[\lambda = 1]$$

...

$$[\lambda = +\infty]$$

Or, λ suit une loi de Poisson donc :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} P[\lambda = i] = 1$$

Par conséquent $\{ [\lambda = 0], [\lambda = 1], \dots, [\lambda = +\infty] \}$ forment un système complet d'événements.

Il est alors possible d'appliquer à X la formule des probabilités totales :

$$P[X = k] = \sum_{i=0}^{+\infty} P[X = k/\lambda = i]P[\lambda = i] = \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-i} \frac{i^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^i}{i!} = \frac{e^{-\mu}}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-i} i^k \frac{\mu^i}{i!}$$

Ainsi :

$$P[X = k] = \frac{e^{-\mu}}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} i^k \frac{\mu^i}{i!} \left(\frac{\mu}{e}\right)^i$$

2. Preuve que X définit bien une variable discrète

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P[X = k] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\mu}}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} i^k \frac{\mu^i}{i!} \left(\frac{\mu}{e}\right)^i = e^{-\mu} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{\mu}{e}\right)^i \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^k}{k!} = e^{-\mu} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{\mu}{e}\right)^i e^i$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P[X = k] = e^{-\mu} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\mu^i}{i!} = e^{-\mu} e^{\mu} = e^0 = 1$$

3. Détermination de $E(X)$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP[X = k] = \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{e^{-\mu}}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i^k}{i!} \left(\frac{\mu}{e}\right)^i = e^{-\mu} \sum_{i=0}^{+\infty} i \frac{1}{i!} \left(\frac{\mu}{e}\right)^i \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{i^{k-1}}{(k-1)!}$$

Soit :

$$u = k - 1.$$

Si $k = 1$ alors $u = 0$

$$E(X) = e^{-\mu} \sum_{i=1}^{+\infty} i \frac{1}{i!} \left(\frac{\mu}{e}\right)^i \sum_{u=0}^{+\infty} \frac{i^u}{u!} = e^{-\mu} \sum_{i=1}^{+\infty} i \frac{1}{i!} \left(\frac{\mu}{e}\right)^i e^i = e^{-\mu} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu^{i-1} \mu}{(i-1)!}$$

$$E(X) = e^{-\mu} \mu \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu^{i-1}}{(i-1)!} = e^{-\mu} \mu \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{\mu^v}{v!} = \mu e^{-\mu} e^{\mu} = \mu e^0 = \mu$$

Soit :

$$v = k - 1.$$

Si $k = 1$ alors $v = 0$

$$E(X) = e^{-\mu} \mu \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{\mu^v}{v!} = \mu e^{-\mu} e^{\mu} = \mu e^0 = \mu$$