LOI DE PARETO

Cette loi est hors programme. Sa connaissance est toutefois utile car elle a été au coeur de sujets d'HEC et de l'ESSEC

Soient $(a, \alpha) \in \Re^2$ tels que a>0 et $\alpha > 1$.

Soit f telle que $\begin{cases} x < a \Rightarrow f(x) = 0 \\ x \geq a \Rightarrow f(x) = \dfrac{\lambda}{x^\alpha} \end{cases}$

1°) Déterminer λ pour que f soit une densité de probabilité

λ doit être choisi tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$$\Leftrightarrow 0 + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_{a}^{+\infty} \frac{\lambda}{x^\alpha} dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda \int_{a}^{+\infty} x^{-\alpha} dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_a^{+\infty} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda \left[\frac{1}{-\alpha+1} . \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_a^{+\infty} = 1$$

Or lim $\frac{1}{x^{\alpha-1}}$ pour $x \to +\infty$ =0 quand l'exposant de x est supérieur à 0 soit α -1>0 soit α >1, ce qui est, par hypothèse le cas ici (cf. : énoncé.). Donc λ doit être choisi tel que :

$\lambda (0 - \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{a^{\alpha-1}}) = 1$ soit $\lambda \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{a^{\alpha-1}} = 1$ soit finalement : $\boxed{\lambda = (\alpha-1)a^{\alpha-1}}$

2°) Déterminer la fonction de répartition F de X

F(x)= $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Si x<a alors f(x)=0 donc F(x)=0

Si $x \geq a$ alors F(x)= $\int_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{x} f(t)dt = 0 + \int_{a}^{x} (\alpha-1)a^{\alpha-1} . \frac{1}{t^\alpha} dt$. La variable d'intégration étant t, la plupart des termes traités comme des constantes du point de vue de l'intégration peuvent être sortis de l'intégrale. Ainsi :

F(x)= $(\alpha-1)a^{\alpha-1}\int_a^x t^{-\alpha}dt=(\alpha-1)a^{\alpha-1}\left[\dfrac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_a^x$

$=(\alpha-1)a^{\alpha-1}\left[\dfrac{1}{1-\alpha}.\dfrac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_a^x$=-$(\alpha-1)a^{\alpha-1}\dfrac{1}{\alpha-1}\left(\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{a^{\alpha-1}}\right)$. En simplifiant par $\alpha-1$:

F(x)= $a^{\alpha-1}\left(\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{a^{\alpha-1}}\right)$. Donc finalement : $\boxed{x\geq a\Rightarrow F(x)=1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\alpha-1}}$

3°) Calculer le moment non centré d'ordre r

E(X^r)= $\int_{-\infty}^{+\infty}x^r.f(x)dx=\int_{-\infty}^{a}x^r.f(x)dx+\int_a^{+\infty}x^r.f(x)dx=0+\int_a^{+\infty}x^r.(\alpha-1)a^{\alpha-1}x^{-\alpha}dx$

$=(\alpha-1)\,a^{\alpha-1}\int_a^{+\infty}x^{r-\alpha}dx=(\alpha-1)\,a^{\alpha-1}\int_a^{+\infty}\dfrac{1}{x^{\alpha-r}}dx$.

D'après le critère de Riemann, cette intégrale est convergente si $\alpha-r>1$ soit $r<\alpha-1$.

Dans ce cas : E(X^r)= $(\alpha-1)\,a^{\alpha-1}\int_a^{+\infty}x^{r-\varepsilon}dx=(\alpha-1)\,a^{\alpha-1}\left[\dfrac{x^{r-\alpha+1}}{r-\alpha+1}\right]_a^{+\infty}$

$=(\alpha-1)\,a^{\alpha-1}\left[\dfrac{1}{r-\alpha+1}.\dfrac{1}{x^{\alpha-r-1}}\right]_a^{+\infty}$=-$(\alpha-1)\,a^{\alpha-1}.\dfrac{1}{r-\alpha+1}.\dfrac{1}{a^{\alpha-r-1}}$)car au voisinage de l'infini, l'expression entre crochets vaut 0. Donc :

E(X^r)=$\dfrac{1-\alpha}{1-\alpha+r}$a^r pour $r<\alpha-1$.

Si r$\geq\alpha-1$ alors E(X^r) n'existe pas.

4°) Calculer la médiane Me de la distribution de X

Me vérifie F(Me)=0,5 soit 1-$\left(\dfrac{a}{Me}\right)^{\alpha-1}$=0,5 soit encore : $\left(\dfrac{a}{Me}\right)^{\alpha-1}$=0,5 donc :

$\dfrac{a^{\alpha-1}}{Me^{\alpha-1}}$=0,5 $\Leftrightarrow$ $Me^{\alpha-1}=\dfrac{a^{\alpha-1}}{0,5}$ et finalement : Me = $\sqrt[\alpha-1]{2a^{\alpha-1}}$. Conclusion : $\boxed{Me=\sqrt[\alpha-1]{2}}$

5°) Etudier f et F

a) Etude de f

Si x<a alors f(x)=0

Si x $\geq$ a alors f(x)= $(\alpha - 1)\, a^{\alpha-1} \dfrac{1}{x^{\alpha}} = (\alpha - 1)\, a^{\alpha-1}\, x^{-\alpha}$ donc f'(x)= -α $(\alpha - 1)\, a^{\alpha-1}\, x^{-\alpha-1}$<0 car α >1 et a>0 donc α $(\alpha - 1)\, a^{\alpha-1}\, x^{-\alpha-1}$>0 et finalement -$\alpha$ $(\alpha - 1)\, a^{\alpha-1}\, x^{-\alpha-1}$<0 donc f est décroissante.

NB : lim f(x) quand x tend vers $+\infty$ = 0 donc la courbe de f admet y=0 (axe des abscisses) comme asymptote horizontale).

b) Etude de F

Si x<a alors f(x)=0 donc F(x)=0

Si x $\geq$ a alors F est croissante (cf . : propriété des fonctions de répartition) et lim F(x) quand x tend vers $+\infty$ =1 donc sa courbe admet y=1 pour asymptote horizontale.