

## Matrices de Leontiev

### 1. Contexte

Dans les économies contemporaines, la production est un processus complexe : une grande variété de biens sont produits grâce à des technologies spécifiques. Les tâches industrielles sont alors divisées entre plusieurs secteurs d'activités spécialisés qui sont liés par de nombreuses interdépendances techniques.

Généralisant le tableau économique de Quesnay, Leontiev a développé, dans les années 40, un outil d'analyse qui permet d'analyser ces liaisons intersectorielles du processus de production.

### 2. Valeur du surplus dans une économie

L'économie est supposée composée de plusieurs secteurs de production élémentaires, spécialisés dans la fabrication de certains types de produits.

Dans l'hypothèse de  $n$  secteurs et  $m$  biens, la production est représentée par deux matrices  $A$  et  $B$  à  $m$  lignes et  $n$  colonnes :  $(A, B) \in \mathcal{M}_{m,n}^2(\mathbb{R})$

- Matrice *input*  $A$ , dont l'élément générique  $a_{ij}$  représente la quantité de bien  $i$  consommée comme bien de production du secteur  $j$  ;
- Matrice *output*  $B$ , dont l'élément générique  $b_{ij}$  représente la quantité de bien  $i$  produit comme par le secteur  $j$ .

Soit :

- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$  = vecteur des niveaux d'activité de chacun des  $n$  secteurs ;
- $Q = BX = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2n} \\ \dots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$  = vecteur de production brute. Il s'agit bien d'un vecteur, ou d'une matrice unicolonne, car le produit d'une matrice  $(m, n)$  par une matrice  $(n, 1)$  est une matrice  $(m, 1)$ , c'est-à-dire une matrice à  $m$  lignes et 1 colonne ;
- $AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$  = vecteur des consommations productives telles que les matières premières et l'amortissement des équipements fixes ;
- $Y = BX - AX = (B - A)X = \begin{pmatrix} b_{11} - a_{11} & b_{12} - a_{12} & \dots & b_{1n} - a_{1n} \\ b_{21} - a_{21} & b_{22} - a_{22} & & b_{2n} - a_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ b_{m1} - a_{m1} & b_{m2} - a_{m2} & \dots & b_{mn} - a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$  = vecteur de surplus ou de production nette ;
- $p = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_m)$  = vecteur ligne des prix par produit.

La valeur du surplus est :

$$p.Y = p.(B - A).X = (p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_m) \begin{pmatrix} b_{11} - a_{11} & b_{12} - a_{12} & \dots & b_{1n} - a_{1n} \\ b_{21} - a_{21} & b_{22} - a_{22} & & b_{2n} - a_{2n} \\ \dots & & \dots & \dots \\ b_{m1} - a_{m1} & b_{m2} - a_{m2} & \dots & b_{mn} - a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$p.Y = (p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_m) \begin{pmatrix} (b_{11} - a_{11}).x_1 + (b_{12} - a_{12}).x_2 + \dots + (b_{1n} - a_{1n}).x_n \\ (b_{21} - a_{21}).x_1 + (b_{22} - a_{22}).x_2 + \dots + (b_{2n} - a_{2n}).x_n \\ \dots \\ (b_{m1} - a_{m1}).x_1 + (b_{m2} - a_{m2}).x_2 + \dots + (b_{mn} - a_{mn}).x_n \end{pmatrix}$$

$$p.Y = p_1. [(b_{11} - a_{11}).x_1 + (b_{12} - a_{12}).x_2 + \dots + (b_{1n} - a_{1n}).x_n] \\ + p_2. [(b_{21} - a_{21}).x_1 + (b_{22} - a_{22}).x_2 + \dots + (b_{2n} - a_{2n}).x_n] \\ + \dots + p_m. [(b_{m1} - a_{m1}).x_1 + (b_{m2} - a_{m2}).x_2 + \dots + (b_{mn} - a_{mn}).x_n]$$

$$p.Y = \sum_{i=1}^m p_i. \left[ \sum_{j=1}^n (b_{ij} - a_{ij}).x_j \right] = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m p_i. (b_{ij} - a_{ij}).x_j$$

La valeur du surplus est donc la somme des valeurs ajoutées des différents secteurs.

### 3. Niveau d'activité pour atteindre le surplus

Les matrices  $A$  et  $B$  sont désormais supposées carrées ( $m=n$ ) et chaque secteur est désormais supposé produire un seul bien. Ainsi :  $B=I$ . Donc :

$$X = (I - A)^{-1}.Y$$

Or :

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$$

Donc :

$$X = (I - A)^{-1}.Y = \left( \sum_{k=0}^{+\infty} A^k \right).Y = (A^0 + A^1 + A^2 \dots).Y = Y + AY + A^2Y + \dots$$

Ainsi, pour disposer du surplus  $Y$ , il faut non seulement produire  $Y$  mais aussi les biens de production nécessaires à la fabrication de  $Y$ , soit  $AY$ , plus les biens de production nécessaires à la fabrication des biens  $AY$ , soit  $A^2Y$ ....