LOI NORMALE

Remarque liminaire importante

Dans tout ce paragraphe, admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

Soit X une variable aléatoire continue suivant une loi normale de paramètres m et σ dont la densité est f. On a :

$X \rightarrow N(m,\sigma^2) \Leftrightarrow \forall x \in \Re$, $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2}$ avec $\sigma > 0$

1°) Montrons que f est bien une densité

- f est continue sur $\Re$
- f est positive car l'exponentielle est toujours positive et $\sigma > 0$
- Montrons que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} . \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2} dx .$$

Posons $u = \frac{x-m}{\sigma}$ pour se ramener à l'intégrale de la remarque liminaire.

Dès lors $x = \phi(u) = \sigma u + m$ donc $\varphi'(u) = \sigma$ et $\phi^{-1}(u) = \frac{u-m}{\sigma}$.

Par conséquent : comme $\sigma > 0$, $\phi^{-1}(-\infty) = -\infty$ et $\phi^{-1}(+\infty) = +\infty$, doù :

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} . \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u)^2} \sigma du = \sigma \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} . \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . \sqrt{2\pi}$ compte tenu du résultat admis de la remarque liminaire. Conclusion : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Très important : désormais, lorsqu'on recontrera, dans une épreuve de concours, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, on pourra dire que cette intégrale généralisée est égale à $\sqrt{2\pi}$ car :

1. La fonction $f : x \rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{x^2}{2}}$ est la densité de probabilité de la loi normale centrée réduite.
2. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{x^2}{2}} . dx = 1$.
3. En d'autres termes : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$

2°) Montrons que *m* représente l'espérance mathématique (ou la moyenne) de X.

E(X)= $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2} dx$.

Utilisons le même changement de variable qu'au 1°). Dès lors :

E(X)= $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma u + m)e^{-\frac{1}{2}(u)^2} \sigma du = \sigma \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma ue^{-\frac{1}{2}(u)^2} du + \sigma \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} me^{-\frac{1}{2}(u)^2} du$

$= \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} ue^{-\frac{1}{2}(u)^2} du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} .\mathrm{m} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u)^2} du$.

Calculons J= $\int_{-\infty}^{+\infty} ue^{-\frac{1}{2}(u)^2} du$

J= $\left[-e^{-\frac{u^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \left[e^{-\frac{u^2}{2}} \right]_{+\infty}^{-\infty}$ =0-0=0

Donc E(X)= $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. m$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u)^2} du .= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.m. $\sqrt{2\pi}$ compte tenu du résultat admis de la remarque liminaire.

Conclusion : $\boxed{E(X)=m}$

3°) Montrons que σ représente l'écart type de X.

Il convient, en d'autres termes de montrer que V(X)= σ^2

Commençons par calculer E (X^2)

E(X^2)= $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2} dx$.

Utilisons encore le même changement de variable qu'au 1°). Dès lors :

E(X^2)= $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma u + m)^2 e^{-\frac{1}{2}(u)^2} \sigma du = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma^2 u^2 + 2m\sigma u + m^2)e^{-\frac{1}{2}(u)^2} \sigma du$

$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 u^2 e^{-\frac{1}{2}(u)^2} \sigma du + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} 2m\sigma ue^{-\frac{1}{2}(u)^2} \sigma du + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} m^2 e^{-\frac{1}{2}(u)^2} \sigma du$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}u^2e^{-\frac{1}{2}(u)^2}du+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.2\sigma\,\mathrm{m}\int_{-\infty}^{+\infty}ue^{-\frac{1}{2}(u)^2}du+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\mathrm{m}^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(u)^2}du$$

Les deux dernières intégrales ont déjà été rencontrées précédemment. Il reste alors à calculer : K=$\int_{-\infty}^{+\infty}u^2e^{-\frac{1}{2}(u)^2}du$. Pour cela :

étudions K_n=$\int_{-\infty}^{+\infty}u^ne^{-\frac{1}{2}(u)^2}du$:

a) Préciser la valeur de K_n si n est impair
b) Exprimer K_n en fonction de K_{n-2}
c) En déduire K_n en fonction de n

a) Soit g(x)=$x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$

Si n est impair alors g(-x)=- $x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$ =-g(x) donc g impair. Dès lors $\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dx$=0

b) Pour exprimer K_n en fonction de K_{n-2}, il convient de procéder par intégration par parties. En effet, en utilisant la formule d'intégration par parties : $\int u'v$= uv - $\int uv'$, on constate que si v est une fonction dont l'exposant est n alors v' est une fonction dont l'exposant est n-1 [$(x^n)'$ = nx^{n-1}]. En outre, pour obtenir une relation entre I_n et I_{n-2}, il convient de partir d'une expression de f_n en fonction de n-1 par factorisation.

Ainsi : K_n=$\int_{-\infty}^{+\infty}u^ne^{-\frac{1}{2}(u)^2}du=\int_{-\infty}^{+\infty}x^{n-1}.xe^{-\frac{1}{2}(x)^2}du$

(NB : u est une variable muette : en d'autres termes, elle n'apparaîtra pas dans le résultat final. Aussi, remplacer u par x – afin de pouvoir utiliser les notations habituelles pour l'intrégation par parties - ne change rien.

Soit u' = $xe^{-\frac{x^2}{2}} \Leftarrow$ u = $-e^{-\frac{x^2}{2}}$

et soit v= x^{n-1} $\Rightarrow$v'=(n-1)x^{n-2}.

D'où : K_n= $\left[-x^{n-1}e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}$+(n-1)$\int_{-\infty}^{+\infty}x^{n-2}.xe^{-\frac{1}{2}(x)^2}dx$.

Or lim $x^{n-1}e^{-\frac{x^2}{2}}$ = 0 quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$. Donc : K_n= (n-1)K_{n-2}

c) Ecrivons alors tous les termes pairs :

$\cancel{K_2}$ = 1. K_0
$\cancel{K_4}$= 3. $\cancel{K_2}$
$\cancel{K_6}$ = 5. $\cancel{K_4}$
$\cancel{K_6}$

…

$\cancel{K_{2k-2}=}$

$K_{2k} = (2k-1).\cancel{K_{2k-2}}$

En multipliant membre à membre :

$K_{2k} = (2k-1)\ldots.5.3.1.K_0$.

Multiplions (afin de faire apparaître des factorielles) et divisons simultanément par les termes pairs :

$$K_{2k} = \frac{1.2.3.4.5....(2k-1).(2k)}{2.4.....(2k)}K_0 = \frac{(2k)!}{(2x1)(2x2)...(2xk)}K_0 = \frac{(2k)!}{2^k k!}K_0$$

Or $K_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x)^2}dx = \sqrt{2\pi}$

Finalement : $K_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!}\sqrt{2\pi}$

Il est ainsi possible de calculer $E(X^2)$

$$E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-\frac{1}{2}(u)^2}du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.2\sigma m\int_{-\infty}^{+\infty} ue^{-\frac{1}{2}(u)^2}du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.m^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u)^2}du$$

$$E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\sigma^2 K_2 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.2\sigma m K_1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\ m^2 K_0.$$

Or : $K_2 = \frac{(2x1)!}{2^1 1!}\sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi}$

$K_1=0$ (car l'indice 1 est impair)
$K_0 = \sqrt{2\pi}$.
Donc : $E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\sigma^2\sqrt{2\pi} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\ m^2\sqrt{2\pi} = \sigma^2 + m^2$
$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sigma^2 + m^2 - m^2$.

Conclusion : $\boxed{V(X) = \sigma^2}$

4°) Etudier la fonction de répartition F et la densité f de X

a) courbe de F

F est croissante (cf. : propriétés des fonctions de répartition).

Lim F(x) quand x tend vers $-\infty = \int_{-\infty}^{-\infty} f(x)dx = 0$ donc la courbe de F admet y=0 pour asymptote horizontale.

Lim F(x) quand x tend vers $+\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ car f est une densité donc la courbe de F admet y=1 pour asymptote horizontale.

b) courbe de f

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2}$ avec $\sigma > 0$

$f'(x) = -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} . \frac{1}{2} .2. \frac{x-m}{\sigma} . \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2} = -\frac{x-m}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2}.$

Comme l'exponentielle, l'écart type et la racine carrée sont toujours positifs, le signe de f'(x) est celui de –(x-m)=m-x.
Or m-x>0 si x<m.
Donc f est croissante si x<m et f est décroissante si x>m.
Et x=m est donc le maximum de f.

5°) Etude des propriétés de la loi normale centrée réduite suivie par X*.

$X^* \rightarrow N(0\,;1) \Leftrightarrow \forall x \in \Re$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{1}{2}x^2}$

a) Montrer que $X \rightarrow N(m\,;\,\sigma) \Leftrightarrow X^* \rightarrow N(0\,;1)$ en utilisant la fonction de répartition de X.
b) Montrer que $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

a) Montrons d'abord que $X \rightarrow$ $X \rightarrow N(m,\sigma^2) \Rightarrow X^* \rightarrow N(0\,;1)$

$X \rightarrow N(m,\sigma^2) \Rightarrow P[X<x] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} . \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m}{\sigma})^2} dt$

$\Rightarrow P[X^*<x] = P[\frac{X-m}{\sigma}<x] = P[X<\sigma x + m] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} . \int_{-\infty}^{\sigma x+m} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m}{\sigma})^2} dt$

Posons u=$\frac{t-m}{\sigma}$ pour se ramener à l'intégrale de la remarque liminaire

Dès lors t=ϕ (u)=$\sigma u + m$ donc φ'(u)= σ et ϕ^{-1}(u)=$\frac{u-m}{\sigma}$.

D'où : P[X*<x] =$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}(u)^2}\sigma du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}(u)^2} du$. On reconnaît alors la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite donc X* $\rightarrow$N(0 ;1)

Montrons maintenant que X* $\to$ N(0 ;1) $\Rightarrow$ X $\to$ N(m ; σ)

X*= $\frac{X-m}{\sigma}$ donc P[X<x]=P[σX^*+m <x]=P[X*< $\frac{x-m}{\sigma}$]= $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}(t)^2} dt$.

Posons t= $\frac{u-m}{\sigma}$. Dès lors t= ϕ (u)= $\frac{u-m}{\sigma}$ donc φ '(u)= $\frac{1}{\sigma}$ et ϕ^{-1}(u)= $\sigma u+m$.

Ainsi : P[X<x]= P[X*< $\frac{x-m}{\sigma}$]= $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}(\frac{u-m}{\sigma})^2} \frac{1}{\sigma}du = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m}{\sigma})^2} dt$

On reconnaît alors la fonction de répartition de la loi normale donc X $\to$ N(m ; σ)

b) Φ (-x)= $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{1}{2}(t)^2} dt$.

Soit u=-t. Dès lors : Dès lors t= ϕ (u)= -u donc φ '(u)= -1 et ϕ^{-1}(u)=-u. Ainsi :

$$\Phi\ (-x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{+\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}(t)^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{x}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(t)^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(t)^2} dt - \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}(t)^2} dt)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(t)^2} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}(t)^2} dt = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}(t)^2} dt = 1 - \Phi\ (x).$$