Indépendance et loi de somme

1. Principe

Soit 2 variables aléatoires X et Y indépendantes. Les lois de X et de Y sont connues. On se propose de déterminer la loi de $X+Y$.

Pour cela, il convient de déterminer $P(X+Y=k)$

Supposons que $X(\Omega)=Y(\Omega)=[a,b]$ ou $[a,+\infty]$. Dans ce cas :

$$P(X+Y=k)=P[(X=a\cap Y=k-a)\cup(X=a+1\cap Y=k-a-1)\dots(X=k-a\cup Y=k)]$$

Les événements dont on considère les réunions sont incompatibles. Donc :

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=a}^{k}P(X=i\cap Y=k-i)$$

Compte tenu de l'indépendance de X et de Y :

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=a}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)$$

2. Somme de 2 variables binomiales indépendantes

Soit $X\hookrightarrow B(n,p)$ et $Y\hookrightarrow B(m,p)$ deux variables binomiales indépendantes.
Dans ce cas : $X(\Omega)=[0,n]$ et $Y(\Omega)=[0,m]$. Dès lors : Dès lors : $(X+Y)(\Omega)=[0,n+m]$

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i\cap Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)$$

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}p^{i}q^{n-i}\binom{m}{k-i}p^{k-i}q^{m-k+i}$$

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}p^{k}q^{m+n-k}=p^{k}q^{m+n-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$

On reconnaît la formule de Vandermonde.

Ainsi :

$$P(X+Y=k)=\binom{n+m}{k}p^{k}q^{m+n-k}$$

Finalement :

$$X+Y\hookrightarrow B(n+m,p)$$

3. Somme de 2 variables de Poisson indépendantes

$X \hookrightarrow P(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow P(\mu)$ deux variables de Poisson indépendantes
$X(\Omega) = N$ et $Y(\Omega) = N$. Dès lors : $(X+Y)(\Omega) = N$

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i \cap Y=k-i) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i)$$
$$P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\mu}\frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}$$

Multiplions et divisons par $k!$ pour faire apparaître une combinaison :

$$P(X+Y=k) = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!\,(k-i)!}\lambda^i\mu^{k-i} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda^i\mu^{k-i}$$

On reconnaît la formule du binôme de Newton. Ainsi :

$$P(X+Y=k) = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}(\lambda+\mu)^k$$

Finalement :

$X + Y \hookrightarrow P(\lambda+\mu)$

4. Exemple moins usuel

On dispose de la loi conjointe du couple (X,Y) : $P(X=i \cap Y=j) = \frac{1}{e(1+i+j)!}$, avec $X(\Omega) = Y(\Omega) = N$ et on se propose de déterminer la loi de *X*+*Y*. Il n'est pas du tout dit que les deux variables sont indépendantes.

Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = N$, on a : $(X+Y)(\Omega) = N$

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i \cap Y=k-i) = \sum_{i=0}^{k}\frac{1}{e(1+i+k-i)!} = \sum_{i=0}^{k}\frac{1}{e(1+k)!}$$
$$P(X+Y=k) = \frac{1}{e}\frac{1}{(1+k)!}\sum_{i=0}^{k}1 = \frac{1}{e}\frac{1}{(1+k)!}.(k+1) = \frac{1}{e}\frac{k+1}{(k+1).k!}$$

$$P(X+Y=k) = \frac{1}{e.k!} = \frac{e^{-1}.1^k}{k!}$$

Ainsi : $X + Y \hookrightarrow P(1)$