Loi binomiale négative

Loi hors programme qui prolonge l'étude de la loi de Pascal

1. Hypothèses et notations

On réalise une succession d'épreuves de Bernoulli identiques (ayant toutes une probabilité de succès égale à p) et indépendantes jusqu'à obtenir r succès. Soit :

- X le nombre d'épreuves qu'il convient de réaliser pour obtenir le r-ème succès ;
- Y le nombre d'échec qui ont précédé le r-ème succès.

X définit une variable de Pascal (cf. : fiche sur la Loi de Pascal)

On se propose de déterminer la loi de Y puis de déterminer son espérance et sa variance

2. Rappels sur la loi de X

$X(\Omega) = [r, +\infty[$

$\mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{k}) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$

$E(X) = \frac{r}{p}$

$V(X) = \frac{rq}{p^2}$

3. Etude de la loi de Y

a. Détermination de $Y(\Omega)$

Il est possible chacune des r premières épreuves se soit traduite par un succès. Dans ce cas, il n'y a pas eu d'échec.

Il est également possible que chaque épreuve se traduise par un échec. Dans ce cas, il convient de réaliser une infinité d'épreuves et le nombre de succès est infini.

Ainsi : $Y(\Omega) = [0, +\infty[= N$

b. Détermination de P(Y = k)

On remarque que le nombre total X d'épreuves jusqu'à obtenir le r-ème succès est égal à la somme du nombre Y d'échecs et du nombre r de succès. En d'autres termes : $X = Y + r$

Donc : $Y = X - r$.

Ainsi :

$$P(Y = k) = P(X - r = k) = P(X = k + r) = \binom{k + r - 1}{r - 1} p^r q^{k+r-r} = \binom{k + r - 1}{r - 1} p^r q^k$$

Or :

$$\binom{k + r - 1}{r - 1} = \frac{(k + r - 1)!}{(r - 1)!\,(k + r - 1 - r + 1)!} = \frac{(k + r - 1)!}{(r - 1)!\,k!} = \binom{k + r - 1}{k}$$

D'où, finalement :

$$P(Y = k) = \binom{k + r - 1}{k} p^r q^k$$

4. Détermination de E(Y)

$Y = X - r$

Donc : $E(Y) = E(X - r) = E(X) - r = \frac{r}{p} - r = \frac{r - rp}{p} = \frac{r(1-p)}{p}$

D'où, finalement :

$$E(Y) = \frac{rq}{p}$$

5. Détermination de V(Y)

De même :

$V(Y) = V(X - r) = V(X)$

D'où :

$$V(Y) = \frac{rq}{p^2}$$