

Lemme des coalitions**1. Rappels de cours****a. Principale formulation**

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_n)$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Dès lors, toute fonction de X_1, X_2, \dots, X_p est indépendante de toute variable aléatoire fonction de X_{p+1}, \dots, X_n .

En d'autres termes, toutes fonctions de certaines variables aléatoires sont indépendantes de toutes fonctions de toutes les autres.

b. Seconde formulation

Soit une application $f : R \rightarrow R$.

Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Dès lors, $f(X_1), f(X_2), \dots, f(X_n)$ sont indépendantes.

2. Exemple

Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

On suppose que chacune de ces variables aléatoires suit une loi de $B(p)$

Déterminer $E(e^{t.S_n})$ où :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

$$E(e^{t.S_n}) = E\left(e^{\frac{t}{n} \sum_{k=1}^n X_k}\right) = E\left(e^{\frac{t}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)}\right) = E\left(e^{\frac{t}{n}X_1 + \frac{t}{n}X_2 + \dots + \frac{t}{n}X_n}\right)$$

$$E(e^{t.S_n}) = E\left(e^{\frac{t}{n}X_1} e^{\frac{t}{n}X_2} \dots e^{\frac{t}{n}X_n}\right)$$

Soit $f(x) = e^{\frac{t}{n}x}$. Ainsi :

$$E(e^{t.S_n}) = E(f(X_1).f(X_2) \dots f(X_n)).$$

Or, les variables X_1, X_2, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes.

Dès lors : $f(X_1), f(X_2), \dots, f(X_n)$ sont aussi mutuellement indépendantes. Ainsi :

$$E(e^{t.S_n}) = E[f(X_1)].E[f(X_2)]. \dots E[f(X_n)]$$

$$E(e^{t.S_n}) = E\left(e^{\frac{t}{n}X_1}\right) E\left(e^{\frac{t}{n}X_2}\right) \dots E\left(e^{\frac{t}{n}X_n}\right)$$

Or, d'après le théorème du transfert :

$$E\left(e^{\frac{t}{n}X}\right) = \sum_{k \in X(\Omega)} e^{\frac{t}{n}k} P(X = k)$$

Ainsi, pour $X \rightarrow B(p) \Leftrightarrow \begin{cases} X(\Omega) = \{0,1\} \\ P(X = 0) = 1 - p ; P(X = 1) = p \end{cases}$

$$E\left(e^{\frac{t}{n}X}\right) = \sum_{k=0}^1 e^{\frac{t}{n}k} P(X = k) = e^{\frac{t}{n}0} P(X = 0) + e^{\frac{t}{n}1} P(X = 1)$$

$$E\left(e^{\frac{t}{n}X}\right) = 1 \cdot (1 - p) + e^{\frac{t}{n}1} p = 1 - p + p e^{\frac{t}{n}1} = 1 + p(e^{\frac{t}{n}} - 1)$$

Or :

$$E(e^{t.S_n}) = E\left(e^{\frac{t}{n}X_1}\right) E\left(e^{\frac{t}{n}X_2}\right) \dots E\left(e^{\frac{t}{n}X_n}\right)$$

Donc, finalement :

$$E(e^{t.S_n}) = \left(1 + p(e^{\frac{t}{n}} - 1)\right)^n$$