

## Le corps en mathématiques

### 1. Lois de composition

Une loi  $+$  est de composition interne sur un ensemble  $E$  non vide si :  $\forall (x, y) \in E^2, x + y \in E$

Une loi  $.$  est de composition externe sur un ensemble  $E$  non vide si :  
 $\forall x \in E, \forall \lambda \in R, \lambda x \in E$

### 2. Espace vectoriel

Un espace vectoriel sur  $R$  est un ensemble  $E$  non vide, muni d'une loi de composition interne  $+$  et d'une loi de composition externe  $.$  qui vérifient :

- a. Commutativité de  $+$  :  $\forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x$
- b. Associativité de  $+$  :  $\forall (x, y, z) \in E^3, x + (y + z) = (x + y) + z$
- c.  $+$  admet un élément neutre  $0_E$  :  $\forall x \in E, x + 0_E = 0_E + x = x$
- d. Unicité d'un opposé :  $\forall x \in E, \exists ! y \in E, x + y = y + x = 0_E$
- e.  $\forall (\lambda, \mu) \in R^2, \forall x \in E, (\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$
- f.  $\forall (\lambda, \mu) \in R^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
- g.  $\forall \lambda \in R, \forall (x, y) \in E^2, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
- h.  $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$

Les éléments de  $E$  sont des vecteurs et les éléments de  $R$  sont des réels ou scalaires

La vérification des propriétés a, b, c et d permettent de dire que  $(E, +)$  est un groupe commutatif

### 3. Anneau

Un anneau est un ensemble muni de 2 lois de composition interne  $(A, +, .)$  telles que :

1.  $(A, +)$  est un groupe commutatif dont l'élément neutre est  $0_A$
2. La loi  $.$  est associative et distributive à gauche et à droite par rapport à  $+$  :  
 $\forall (x, y, z) \in A^3, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$  et  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
3. La loi  $.$  admet un élément neutre différent de  $0_A$  et noté  $1_A$

Si la loi  $.$  est commutative, l'anneau est commutatif

### 4. Corps

Un corps est un anneau commutatif dans lequel tout élément non nul est inversible

Un ensemble, un groupe et un corps (comme le corps des Mines) correspondent à un regroupement d'individus avec une cohésion croissante. Dans le même type de contexte, le terme anneau a été traduit de l'allemand « Ring » qui signifie cercle (comme un cercle philatélique)