

La fonction de production de Cobb Douglas

1. Principe général

Soit :

Y : niveau de production

X_1 : 1^{er} facteur de production (par exemple : le capital qui synthétise l'équipement fixe nécessaire à la production : infrastructures de travaux publics, bâtiments, machines)

X_2 : 2^{ème} facteur de production (par exemple : le travail)

...

X_n : n -ème facteur de production

Les facteurs autres que le capital et le travail sont notamment les consommations intermédiaires qui correspondent aux biens qui disparaissent dans le cadre du processus de production et d'autres facteurs de production : ressources limitées (gisement minier...), progrès technique, savoir-faire, formation, traitement de l'information, qualité de la gestion d'ensemble...

$c, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$: constantes positives correspondant à des coefficients déterminés par la technologie.

Les facteurs de production sont supposés substituables : il est possible de remplacer l'un des facteurs (par exemple des salariés) par un autre (par exemple des équipements techniques) et d'obtenir le même niveau de production Y .

La forme générale de la fonction de production est :

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n) = c \prod_{i=1}^n X_i^{\alpha_i}$$

Les rendements d'échelle sont constants si : $\forall \lambda \in R, f(\lambda X_1, \lambda X_2, \dots, \lambda X_n) = \lambda \cdot f(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

En d'autres termes, si on multiplie la contribution de chacun des n facteurs de production par réel λ , alors la production est également multipliée par λ .

L'expression de Y peut être linéarisée en passant au logarithme :

$$\ln(Y) = \ln\left(c \prod_{i=1}^n X_i^{\alpha_i}\right) = \ln(c) + \sum_{i=1}^n \ln(X_i^{\alpha_i}) = \ln(c) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln(X_i)$$

2. Fonction de production à deux facteurs

Soit :

$X_1 = K = \text{capital}$

$X_2 = L = \text{travail}$

$\alpha_1 = \alpha$ et $\alpha_2 = 1 - \alpha$

Dans ce cas :

$Y = f(K, L) = c \cdot K^\alpha \cdot L^{1-\alpha}$ avec, comme démontré au paragraphe 3. ci-dessous :

α = élasticité de la production Y par rapport au capital K avec $0 < \alpha < 1$

$1 - \alpha$ = élasticité de la production Y par rapport au capital

Or : $0 < \alpha < 1$ donc $-1 < -\alpha < 0$ et finalement : $0 < 1 - \alpha < 1$

La fonction $Y = f(K, L)$ est bien à rendements d'échelle constants. En effet :

$$\forall \lambda \in R, f(\lambda K, \lambda L) = c. (\lambda K)^\alpha. (\lambda L)^{1-\alpha} = c. K^\alpha. L^{1-\alpha}. \lambda^{\alpha+1-\alpha} = \lambda. c. K^\alpha. L^{1-\alpha} = \lambda. f(K, L)$$

3. Elasticités

a. Principe de l'élasticité

L'élasticité mesure la sensibilité de réaction de la production à la modification initiale de l'un des facteurs. C'est, en d'autres termes, la variation relative (ou en pourcentage) de la production pour (ou rapportée à) une variation relative de l'un des facteurs

Pour mémoire : la production est supposée définie par :

$$Y = c. K^\alpha. L^{1-\alpha}$$

b. Elasticité de la production Y par rapport au capital K

$$e(Y, K) = \frac{\frac{dY}{Y}}{\frac{dK}{K}} = \frac{\frac{dY}{dK} K}{\frac{dY}{dK} Y} = c. \alpha. K^{\alpha-1}. L^{1-\alpha} \cdot \frac{K}{c. K^\alpha. L^{1-\alpha}} = c. \alpha. K^{\alpha-1}. L^{1-\alpha} \cdot \frac{1}{c. K^{\alpha-1}. L^{1-\alpha}}$$

$$e(Y, K) = \alpha$$

c. Elasticité de la production Y par rapport au travail L

$$e(Y, L) = \frac{\frac{dY}{Y}}{\frac{dL}{L}} = \frac{\frac{dY}{dL} L}{\frac{dY}{dL} Y} = c. K^\alpha. (1 - \alpha). L^{1-\alpha-1} \cdot \frac{L}{c. K^\alpha. L^{1-\alpha}}$$

$$e(Y, L) = c. K^\alpha. (1 - \alpha). L^{-\alpha} \cdot \frac{1}{c. K^\alpha. L^{-\alpha}} = 1 - \alpha$$

4. Productivités moyennes ou apparentes

a. Productivité apparente du capital : $q = \frac{Y}{K}$

$$Y = c. K^\alpha. L^{1-\alpha} \Rightarrow q = \frac{Y}{K} = c. K^{\alpha-1}. L^{1-\alpha} = c. \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1}$$

b. Productivité apparente du travail : $s = \frac{Y}{L}$

$$Y = c. K^\alpha. L^{1-\alpha} \Rightarrow s = \frac{Y}{L} = c. K^\alpha. L^{1-\alpha-1} = c. K^\alpha. L^{-\alpha} = c. \left(\frac{K}{L}\right)^\alpha$$

La productivité moyenne du travail dépend donc du capital par travailleur.

Ainsi, la productivité moyenne de chaque facteur ($\frac{Y}{K}$ comme $\frac{Y}{L}$) dépend donc du rapport $\frac{K}{L}$ son utilisation avec l'autre.

c. Intensité capitaliste : $\frac{q}{s} = \frac{Y}{K} \cdot \frac{L}{Y} = \frac{L}{K}$

5. Productivités marginales ou rendements factoriels marginaux

a. Productivité marginale ou rendement factoriel marginal du capital : $PmK = \frac{dY}{dK}$

$$Y = c \cdot K^\alpha \cdot L^{1-\alpha} \Rightarrow \frac{dY}{dK} = c \cdot \alpha \cdot K^{\alpha-1} \cdot L^{1-\alpha} = c \cdot \alpha \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1}$$

b. Productivité marginale ou rendement factoriel marginal du travail : $PmL = \frac{dY}{dL}$

$$Y = c \cdot K^\alpha \cdot L^{1-\alpha} \Rightarrow \frac{dY}{dL} = c \cdot K^\alpha \cdot (1-\alpha) \cdot L^{1-\alpha-1} = c \cdot (1-\alpha) \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^\alpha$$

Ainsi, les productivités marginales de chacun des facteurs ($\frac{dY}{dK}$ comme $\frac{dY}{dL}$) sont fonction :

- des proportions des quantités utilisées des deux facteurs ;
- du rapport $\frac{K}{L}$ de son utilisation avec l'autre.

Pour les classiques, l'offre de travail par les salariés dépend du salaire réel w/p où w est le salaire nominal et p l'indice des prix. S'il y a du chômage c'est que le salaire réel w/p est supérieur à la productivité marginale du travail PmL . Dans ce contexte, le chômage ne peut être que volontaire : il résulte du refus de travailler au nouveau salaire d'équilibre.

Keynes au contraire le refus des salariés de voir leur salaire baisser est finalement une bonne chose car elle évite une spirale déflationniste. Pour Keynes, les salaires nominaux w ne peuvent pas baisser du fait de la viscosité des salaires nominaux liés à la négociation des contrats.

En outre, une baisse des salaires nominaux entraînerait une contraction de la demande qui provoquerait à son tour une baisse de la production. Alors que pour Jean-Baptiste Say l'offre crée sa propre demande, pour Keynes, une demande effective insuffisante va déterminer une offre qui ne correspondra pas à une situation de plein emploi. Selon Keynes, « *le seul fait qu'il existe une insuffisance de la demande effective peut arrêter et arrête souvent l'augmentation de l'emploi avant qu'il ait atteint son maximum* ». Le chômage peut donc être involontaire.

6. Rendements décroissants

a. Décroissance du rendement factoriel marginal du capital

$$\frac{dPmK}{dK} = \frac{d^2Y}{dK^2} = c \cdot \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot K^{\alpha-2} \cdot \left(\frac{1}{L}\right)^{\alpha-1} = c \cdot \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot K^{-2} \cdot L \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}$$

$$\frac{dPmK}{dK} = \frac{c \cdot \alpha \cdot (\alpha - 1)}{K^2} \cdot L \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{Y}{L} = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \frac{Y}{K^2}$$

Or : $0 < \alpha$ et $0 < 1 - \alpha$ donc $\alpha - 1 < 0$. Finalement : $\frac{dPmK}{dK} < 0$

La productivité marginale du capital est donc décroissante. Ainsi, à main d'œuvre inchangée, les unités supplémentaires de capital contribuent à une croissance de la production de plus en plus faible.

b. Décroissance du rendement factoriel marginal du travail

$$\frac{dPmL}{dL} = \frac{d^2Y}{dL^2} = -\alpha \cdot c \cdot (1 - \alpha) \cdot K^{\alpha} \cdot L^{-\alpha-1} = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot c \cdot \frac{1}{L} \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}$$

$$\frac{dPmL}{dL} = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot c \cdot \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{Y}{L} = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \frac{Y}{L^2}$$

Or : $0 < \alpha$ et $0 < 1 - \alpha$ donc $\alpha - 1 < 0$. Finalement : $\frac{dPmL}{dL} < 0$

Ainsi, la productivité marginale d'un facteur diminue lorsqu'on accroît son utilisation

7. Sensibilité de la productivité marginale d'un facteur à l'augmentation de l'utilisation de l'autre facteur

Pour déterminer cette sensibilité, il convient de dériver la productivité marginale relative à un facteur par rapport à l'autre facteur. Ainsi, la production doit être dérivée par rapport à chacun des 2 facteurs.

$$\frac{d^2Y}{dKdL} = \frac{d}{dL} \left[c \cdot \alpha \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1} \right] = c \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot K^{\alpha-1} \cdot L^{-\alpha-1} = c \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{L}$$

$$\frac{d^2Y}{dKdL} = c \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{L} \cdot \frac{Y}{K} = \alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot \frac{Y}{KL}$$

Or : $0 < \alpha$ et $0 < 1 - \alpha$. Finalement : $\frac{d^2Y}{dKdL} > 0$

Ainsi, lorsqu'on augmente l'utilisation d'un facteur, la productivité marginale de l'autre facteur croît.