Loi du Khi-2

Soit $X \hookrightarrow N(0,1)$
Soit $Y = X^2$
On se propose de déterminer d'abord la densité de Y (point 1) puis de montrer que celle-ci intègre $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ (point 2) pour en déduire que Y suit une loi Gamma dont on peut préciser les paramètres (point 3). On en déduira ensuite, par récurrence, que la somme des carrés de n variables normales centrées réduites définit une loi Gamma (point 4). L'étude de la loi Gamma permet d'en déduire l'espérance et la variance de cette somme de carrés (point 5).

1. Expression de la densité de Y

Commençons par déterminer la fonction de répartition de Y

$$F_Y(x) = P(Y < x) = P(X^2 < x) = P\left(-\sqrt{x} < X < \sqrt{x}\right) = F_X\left(\sqrt{x}\right) - F_X\left(-\sqrt{x}\right)$$

Ainsi :

- Si $x < 0$, alors $F_Y(x) = 0$
- Si $x \geq 0$, alors $F_Y(x) = F_X\left(\sqrt{x}\right) - F_X\left(-\sqrt{x}\right)$

Dès lors :

- Si $x \leq 0$, alors $f_Y(x) = 0$
- Si $x > 0$, alors $f_Y(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} f_X\left(\sqrt{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} f_X\left(-\sqrt{x}\right) = \frac{f_X\left(\sqrt{x}\right) + f_X\left(-\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$

Finalement :

- Si $x \leq 0$, alors $f_Y(x) = 0$
- Si $x > 0$, alors $f_Y(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{2\sqrt{2\pi x}} = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi x}} = \frac{e^{-\frac{x}{2}}.x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$

2. Lien entre $f_Y(x)$ et $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

Il a été établi, dans le cadre de la fiche sur la loi de Weibull que, si

$$\Gamma(x) \ = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

alors :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Dès lors :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2\pi} = \sqrt{\pi}$$

Ainsi :

- Si $x \leq 0$, alors $f_Y(x) = 0$
- Si $x > 0$, alors $f_Y(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}.x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).2^{\frac{1}{2}}}$

3. Lien entre $f_Y(x)$ et la loi Gamma

On dit que X suit une loi Gamma de paramètres a et ν strictement positifs si sa densité $f$vérifie :

- Si $x \leq 0$, alors $f(x) = 0$
- Si $x > 0$, alors $f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{a}}.x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu).a^{\nu}}$

On note alors : $X \hookrightarrow \Gamma(a, \nu)$
Dès lors, en on retrouve la densité de Y en posant $a = 2$ et $\nu = \frac{1}{2}$

Finalement : $Y \hookrightarrow \Gamma\left(2, \frac{1}{2}\right)$

4. Loi de la somme des carrés de variables normales centrées réduites

Soit une suite de n variables normales centrées réduites indépendantes $(X_n)_{n\in N*}$ et soit :

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

Montrons, par récurrence, que $Z_n \hookrightarrow \Gamma\left(2, \frac{n}{2}\right)$ en utilisant la propriété admise suivante :

Pour 2 variables Gamma indépendantes U et V où $U \hookrightarrow \Gamma(a, \mu)$ et$V \hookrightarrow \Gamma(a, \nu)$ alors :
$U + V \hookrightarrow \Gamma(a, \mu + \nu)$

Appelons $P(n)$ la propriété à démontrer, à savoir : $Z_n \hookrightarrow \Gamma\left(2, \frac{n}{2}\right)$

Initialisation

Si $n = 1$, alors $Z_1 = X_1^2 = Y \hookrightarrow \Gamma\left(2, \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(2, \frac{n}{2}\right)$ pour $n = \frac{1}{2}$

Hérédité

Supposons que $P(n)$ est vraie c'est-à-dire que $Z_n \hookrightarrow \Gamma\left(2, \frac{n}{2}\right)$. Démontrons que, dans ce cas, $P(n{+}1)$ est vraie aussi c'est-à-dire que : $Z_{n+1} \hookrightarrow \Gamma\left(2, \frac{n+1}{2}\right)$

Or :

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + X_{n+1}^2 = Z_n + X_{n+1}^2$$

Les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont, par hypothèse, indépendantes. Par conséquent, par application du lemme des coalitions, Z_n et X_{n+1} sont également indépendantes.

Or, par hypothèse de récurrence : $Z_n \hookrightarrow \Gamma\left(2, \frac{n}{2}\right)$;
et comme $X_{n+1}^2 = Y \hookrightarrow \Gamma\left(2, \frac{1}{2}\right)$,
$Z_n + X_{n+1}^2 = Z_{n+1} \hookrightarrow \Gamma\left(2, \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)$ grâce à la propriété admise.

Finalement : $Z_{n+1} \hookrightarrow \Gamma\left(2, \frac{n+1}{2}\right)$

5. Espérance et variance de la somme des carrés de variables normales centrées réduites

On a vu, dans le cadre de l'étude de la loi Gamma que :

$X \hookrightarrow \Gamma(a, \nu) \Longrightarrow E(X) = a\nu$ et $V(X) = a^2\nu$

Donc, si $Z_n \hookrightarrow \Gamma\left(2, \frac{n}{2}\right)$ alors :

$E(Z_n) = 2.\frac{n}{2} = n$

et :

$$V(Z_n) = 2^2.\frac{n}{2} = 2n$$