

**Noyau et matrice****1. Rappels de cours**

$$f: E \rightarrow F$$

avec :

$E$  = espace vectoriel muni de la base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$

$F$  = espace vectoriel muni de la base  $\mathcal{B}'$

Soit :

$$A = \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} f$$

$$x \in E$$

$$X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \text{matrice colonne formée des coordonnées de } x \text{ dans la base } \mathcal{B}.$$

$$\text{En d'autres termes : } x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$$

Dans ce cas :

$$x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow AX = 0$$

**2. Exercices d'application**

**a. Soit  $E$  = espace vectoriel muni de la base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$**

$$\text{et } A = \text{mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \text{ Déterminer } \text{Ker}(f).$$

$$\text{Soit } x \in E \text{ et } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \text{matrice colonne formée des coordonnées de } x \text{ dans la base } \mathcal{B}$$

$$\text{En d'autres termes : } x = a e_1 + b e_2 + c e_3$$

$$x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} b + 2c = 0 \\ 3b + 4c = 0 \\ 5c = 0 \end{cases}$$

En procédant par substitution et en partant de la dernière ligne, on a :  $c = 0 \Rightarrow b = 0$

$$\text{Ainsi : } x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\text{Finalement : } \text{Ker}(f) = \{a e_1, a \in R\} = \text{Vect}(e_1)$$

b. Soit  $f$  un endomorphisme de  $R_4[X]$  tel que :  $f(P) = (X - 1)P'(X) - P(X)$

Ecrire  $A = \text{mat}_{\mathcal{B}} f$  où  $\mathcal{B}$  est la base canonique de  $R_4[X]$  et en déduire  $\text{Ker}(f)$   
(source : HEC 1987)

On sait que :  $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3, X^4)$

Pour écrire  $A = \text{mat}_{\mathcal{B}} f$ , il convient de déterminer les coordonnées de  $f(1), f(X), f(X^2), f(X^3), f(X^4)$  dans la base  $(1, X, X^2, X^3, X^4)$ .

De façon générale :

$$f(P) = (X - 1)P'(X) - P(X)$$

Donc, en particulier :

$$f(X^k) = (X - 1)kX^{k-1} - X^k \quad \forall k > 0$$

Ainsi :

$$f(1) = (X - 1)0 - 1 = -1$$

$$f(X^1) = (X - 1)1 - X^1 = X - 1 - X = -1$$

$$f(X^2) = (X - 1)2X - X^2 = X^2 - 2X$$

$$f(X^3) = (X - 1)3X^2 - X^3 = 2X^3 - 3X^2$$

$$f(X^4) = (X - 1)4X^3 - X^4 = 3X^4 - 4X^3$$

Dès lors :

$$A = \text{mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Soit  $P(X) \in R_4[X]$  et  $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$  = matrice colonne formée des coordonnées de  $P(X)$

dans la base  $\mathcal{B}$

En d'autres termes :  $P(X) = a \cdot 1 + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4$

$$P(X) \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f[P(X)] = 0 \Leftrightarrow AY = 0$$

$$P(X) \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P(X) \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} -a - b = 0 \\ -2c = 0 \\ c - 3d = 0 \\ 2d - 4e = 0 \\ 3e = 0 \end{cases}$$

En procédant par substitution et en partant de la dernière ligne, on a :

$$e = 0 \Rightarrow d = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\text{Ainsi : } x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ b = b \\ c = 0 \\ d = 0 \\ e = 0 \end{cases}$$

Finalement :

$$\text{Ker}(f) = \{-b1 + bX, b \in R\} = \{-b(1 + X), b \in R\}$$

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}(-1 + X)$$