

## Démonstrations classiques autour de Ker et Im

### 1. Rappels de cours

#### a. Noyau

Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Le noyau de  $f$  est le sous-ensemble de  $E$  défini par :  $\text{Ker}(f) = \{x \in E, f(x) = 0_F\}$

$$\text{Ker}(f) = E \Leftrightarrow \dim \text{Ker}(f) = \dim E \Leftrightarrow f = 0$$

$$\text{Ker}(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow \dim \text{Ker}(f) = 0 \Leftrightarrow f \text{ injective}$$

#### b. Image

Soit  $f$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . L'image de  $f$  est le sous-ensemble de  $F$  défini par :  $\text{Im}(f) = \{y \in F, \exists x \in E, y = f(x)\}$

$$\text{Im}(f) = F \Leftrightarrow \dim \text{Im}(f) = \dim F \Leftrightarrow f \text{ surjective}$$

$$\text{Im}(f) = \{0_F\} \Leftrightarrow \dim \text{Im}(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

#### c. Ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$ : $\mathcal{L}(E, F)$

- $\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E, F), \forall \lambda \in R, \lambda f + g \in \mathcal{L}(E, F)$
- $\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \forall g \in \mathcal{L}(F, G) \text{ } g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$
- $f$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $F \Rightarrow f^{-1}$  est un isomorphisme de  $F$  dans  $E$
- $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

#### d. Démonstration d'une inclusion

Pour démontrer que  $A \subset B$ , on pose  $x \in A$  et on utilise la définition de  $A$  (par exemple  $A = \text{Ker} f$ , et dans ce cas,  $x \in \text{Ker} f$ ). On démontre alors que :  $x \in A \Rightarrow x \in B$ . Ainsi :  $A \subset B$

#### e. Démonstration que $F = G$ : si $F \subset G$ et si $\dim F = \dim G$ alors $F = G$

## 2. Exemples

- a. Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $R$ ,  $f$  un endomorphisme de  $E$  et  $g$  une application linéaire définie sur  $E$  par :  $\forall x \in E, g(x) = x - f(x)$

i. Vérifier que  $g \in \mathcal{L}(E)$

Il s'agit de démontrer  $g$  est un endomorphisme de  $E$ .

$$g(x) = x - f(x) = (Id - f)(x).$$

$g$  est donc une combinaison linéaire d'endomorphismes de  $E$ .

Or, la combinaison linéaire d'endomorphismes est un endomorphisme

Donc :  $g \in \mathcal{L}(E)$

ii. Montrer que :  $\text{Ker } g \subset \text{Im } f$

$$\text{Soit } x \in \text{Ker } g \Rightarrow g(x) = 0$$

$$\text{Or : } g(x) = x - f(x) \Rightarrow x - f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow x \in \text{Im } f$$

Comme :  $x \in \text{Ker } g \Rightarrow x \in \text{Im } f$ , on en déduit :  $\text{Ker } g \subset \text{Im } f$

iii. Montrer que :  $\text{Ker } f \subset \text{Im } g$

$$\text{Soit } x \in \text{Ker } f \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow g(x) = x \Rightarrow x \in \text{Im } g$$

Comme :  $x \in \text{Ker } f \Rightarrow x \in \text{Im } g$ , on en déduit :  $\text{Ker } f \subset \text{Im } g$

- b. Soit  $E, F$  et  $G$  des espaces vectoriels sur  $R$ ,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$

i. Montrer que :  $\text{Ker } f \subset \text{Ker } (g \circ f)$

$$\text{Soit } x \in \text{Ker } f \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(0) = 0$$

$$\text{Or : } (g \circ f)(x) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker } (g \circ f)$$

Comme :  $x \in \text{Ker } f \Rightarrow x \in \text{Ker } (g \circ f)$ , on en déduit :  $\text{Ker } f \subset \text{Ker } (g \circ f)$

ii. Montrer que :  $\text{Im } (g \circ f) \subset \text{Im } g$

$$\text{Soit } y \in \text{Im } (g \circ f) \Rightarrow \exists x \in E, y = (g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

$$\text{Or : } y = g[f(x)] \Rightarrow y \in \text{Im } g$$

Comme :  $y \in \text{Im } (g \circ f) \Rightarrow y \in \text{Im } g$ , on en déduit :  $\text{Im } (g \circ f) \subset \text{Im } g$

iii. Montrer que :  $g \circ f = 0 \Leftrightarrow \text{Im } f \subset \text{Ker } g$

$$g \circ f = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E, g[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \forall y \in \text{Im } f, g(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \text{Ker } g$$

Comme :  $y \in \text{Im } f$ , on en déduit que  $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$

c. Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$ 

## i. Montrer que la suite des noyaux itérés est croissante c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{Ker } f^n \subset \text{Ker } f^{n+1}$$

$$\text{Soit } x \in \text{Ker } f^n \Leftrightarrow f^n(x) = 0$$

$$\text{Dès lors : } f^{n+1}(x) = f[f^n(x)] = f(0) = 0$$

$$f^{n+1}(x) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker } f^{n+1}$$

$$\text{Comme } x \in \text{Ker } f^n \Rightarrow x \in \text{Ker } f^{n+1}, \text{Ker } f^n \subset \text{Ker } f^{n+1}$$

## ii. Montrer que la suite des images itérées est décroissante c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{Im } f^{n+1} \subset \text{Im } f^n$$

$$\text{Soit } y \in \text{Im } f^{n+1} \Leftrightarrow \exists x \in E, y = f^{n+1}(x) = f^n[f(x)] \in \text{Im } f^n$$

$$\text{Comme } y \in \text{Im } f^{n+1} \Rightarrow y \in \text{Im } f^n, \text{Im } f^{n+1} \subset \text{Im } f^n$$

iii. On suppose que  $\exists p \in \mathbb{N}^*, \text{Ker } f^p = \text{Ker } f^{p+1}$ .

$$\text{Montrer que : } \forall n \geq p, \text{Ker } f^n = \text{Ker } f^p$$

$$\text{Soit } x \in \text{Ker } f^{p+k+1}$$

$$x \in \text{Ker } f^{p+k+1} \Leftrightarrow f^{p+k+1}(x) = f^{p+1}[f^k(x)] = 0$$

$$\text{Dès lors : } f^k(x) \in \text{Ker } f^{p+1}$$

$$\text{Or, d'après l'énoncé : } \exists p \in \mathbb{N}^*, \text{Ker } f^p = \text{Ker } f^{p+1}$$

Dans ce cas :

$$f^k(x) \in \text{Ker } f^p \Leftrightarrow f^p[f^k(x)] = 0 \Leftrightarrow f^{p+k}(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Ker } f^{p+k}$$

$$\text{Comme : } x \in \text{Ker } f^{p+k+1} \Rightarrow x \in \text{Ker } f^{p+k}, \text{ on en déduit que :}$$

$$\text{Ker } f^{p+k+1} \subset \text{Ker } f^{p+k} \quad [1]$$

Or, d'après le résultat de la question (i),  $\text{Ker } f^n \subset \text{Ker } f^{n+1}$ . En remplaçant  $n$  par  $p+k$  :

$$\text{Ker } f^{p+k} \subset \text{Ker } f^{p+k+1} \quad [2]$$

$$\text{En réunissant les résultats [1] et [2] : } \text{Ker } f^{p+k+1} = \text{Ker } f^{p+k}.$$

$$\text{En d'autres termes : } \forall n \geq p, \text{Ker } f^n = \text{Ker } f^p$$

iv. On suppose que  $\exists p \in \mathbb{N}^*, \text{Im } f^p = \text{Im } f^{p+1}$ .

$$\text{Montrer que : } \forall n \geq p, \text{Im } f^n = \text{Im } f^p$$

$$\text{Im } f^{p+k} = \text{Im } f^k(f^p) = f^k[\text{Im } f^p].$$

$$\text{Or, d'après l'énoncé, } \text{Im } f^p = \text{Im } f^{p+1}.$$

$$\text{Dès lors : } \text{Im } f^{p+k} = f^k[\text{Im } f^{p+1}] = \text{Im } f^{p+k+1}.$$

$$\text{En d'autres termes : } \forall n \geq p, \text{Im } f^n = \text{Im } f^p$$

d. Soit  $f \in \mathcal{L}(R^2)$  tel que  $(f - 2Id)^2 = 0$  et  $f \neq 2Id$

i. Montrer que  $Im(f - 2Id) \subset Ker(f - 2Id)$

Soit  $y \in Im(f - 2Id)$ . Dans ce cas,  $\exists x \in R^2, y = (f - 2Id)(x)$

Dès lors :  $(f - 2Id)(y) = (f - 2Id)^2(x) = 0$

Donc :  $y \in Ker(f - 2Id)$

Par conséquent :  $Im(f - 2Id) \subset Ker(f - 2Id)$

ii. Montrer que  $Im(f - 2Id) = Ker(f - 2Id)$

Pour montrer cette égalité, comme  $Im(f - 2Id) \subset Ker(f - 2Id)$ , il convient de montrer que  $dimIm(f - 2Id) = dimKer(f - 2Id)$

Or, on sait que :  $f \neq 2Id \Rightarrow f - 2Id \neq 0 \Rightarrow Im(f - 2Id) \neq \{0\}$

Donc :  $dimIm(f - 2Id) \geq 1$

Par ailleurs, d'après le théorème du rang :

$$dimIm(f - 2Id) + dimKer(f - 2Id) = dim(R^2) = 2$$

Donc, comme  $dimIm(f - 2Id) \geq 1, dimKer(f - 2Id) \leq 1$

En d'autres termes,  $dimKer(f - 2Id) = 0$  ou  $dimKer(f - 2Id) = 1$ .

Or, si  $dimKer(f - 2Id) = 0$ , alors  $f - 2Id$  est injective. De plus  $f \in \mathcal{L}(R^2)$  donc  $f$  et  $f - 2Id$  sont des endomorphismes en dimension finie. Par conséquent, dans ce cas,  $f - 2Id$  est bijective. Dès lors :

$(f - 2Id)^2 = 0 \Rightarrow f - 2Id = f^{-1}(0) = 0 \Rightarrow f = 2Id$  ce qui est absurde car, par hypothèse,  $f \neq 2Id$ .

Ainsi :  $dimKer(f - 2Id) = 1$ . Et donc :  $dimIm(f - 2Id) = 1$

Finalement, comme d'une part  $Im(f - 2Id) \subset Ker(f - 2Id)$ , d'autre part  $dimIm(f - 2Id) = dimKer(f - 2Id)$ , alors  $Im(f - 2Id) = Ker(f - 2Id)$