Détermination d'un intervalle de confiance asymptotique :

application du théorème limite central

1. Notations et hypothèses

Soit X une variable aléatoire dont la loi est connue mais dont un paramètre est inconnu.

Soit un n-uplet $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ qui forme un n-échantillon de la loi de X. Ainsi, $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé (Ω, $\mathcal{A}$, P), mutuellement indépendantes et de même loi que X. Ce n-échantillon est constitué en vue d'estimer le paramètre inconnu de la loi de X.

Soit $E(X_1) = E(X_2) = \cdots = E(X_n) = m$

Et $V(X_1) = V(X_2) = \cdots = V(X_n) = \sigma^2$

Soit par ailleurs : $\overline{X_n} = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} X_i$

Dès lors :

$E(\overline{X_n}) = E\left(\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m = \frac{1}{n}.nm = m$ par linéarité de l'espérance.

$$V(\overline{X_n}) = V\left(\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{1}{n^2}.n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

L'hypothèse d'indépendance des n variables de l'échantillon a ainsi permis de transformer la variance de leur somme en somme des variances

2. Rappel du théorème limite central

Soit $\overline{X_n^*} = \frac{\overline{X_n} - E(\overline{X_n})}{\sqrt{V(\overline{X_n})}}$

Dans ce cas : $\lim_{n\to\infty} P\left[a \leq \overline{X_n^*} \leq b\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \varphi(b) - \varphi(a)$

3. Définition d'un intervalle de confiance

On appelle un intervalle de confiance asymptotique de $g(\theta)$ au niveau de confiance $1-\alpha$ une suite $([U_n, V_n])_{n\geq 1}$ vérifiant :

pour tout $\theta \in \Theta$, il existe une suite de réels (α_n) à valeurs dans [0,1], de limite α telle que $\forall n \geq 1$, $P_\theta(U_n \leq g(\theta) \leq V_n) \geq 1 - \alpha_n$

Par abus de langage, on dit que $[U_n, V_n]$ est un intervalle de confiance asymptotique

4. Existence et expression d'un unique réel positif t_0 tel que $P[-t_0 \leq X * \leq t_0] = 1 - \alpha$

$P[-t_0 \leq X * \leq t_0] = 2.\ \varphi(t_0) - 1 = 1 - \alpha$

Dès lors : $2.\ \varphi(t_0) = 2 - \alpha$ donc $\varphi(t_0) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

Or $0 < \alpha < 1$ donc : $-1 < -\alpha < 0$ et $1 - \frac{1}{2} < 1 - \frac{\alpha}{2} < 1$ soit $\frac{1}{2} < \varphi(t_0) < 1$

La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, φ, est définie et continue sur R.

On sait que $\varphi(0) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 1$. Dès lors, par théorème des valeurs intermédiaires, $\exists t_0 \in R+,\ \varphi(t_0) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

x	0	t_0	$+\infty$
$\varphi(x)$	$\frac{1}{2}$	$1 - \frac{\alpha}{2}$	1

Or φ est strictement monotone (croissante) donc, par théorème de la bijection, t_0 est unique.

Et : $t_0 = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$

5. Application du théorème de la limite central

$$\lim_{n\to\infty} P\left[-\, t_0 \leq \overline{X_n^*} \leq t_0\right] = 2\varphi(t_0) - 1$$

$$= 2\varphi\left[\varphi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right] - 1 = 2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - 1$$

$$= 1 - \alpha$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to\infty} P\left[-\, t_0 \leq \frac{\overline{X_n} - E(\overline{X_n})}{\sqrt{V(\overline{X_n})}} \leq t_0\right] = 1 - \alpha$$

En remplaçant l'espérance et la variance et de $\overline{X_n}$ par leurs valeurs respectives déterminées dans la première partie de cette fiche :

$$\lim_{n\to\infty} P\left[-\, t_0 \leq \frac{\overline{X_n} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq t_0\right] = 1 - \alpha$$

Donc :

$$\lim_{n\to\infty} P\left[-\, t_0 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X_n} - m \leq t_0 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$$

Et finalement :

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\overline{X_n} - t_0\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{X_n} + t_0\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

avec $t_0 = \varphi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$

Conclusion :

$\left[\overline{X_n} - t_0\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{X_n} + t_0\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour m au niveau de confiance $1-\alpha$