

## Inégalités des accroissements finis

### 1. Rappels de cours

#### a. Première inégalité

Soit  $f$  une fonction :

- continue sur  $[a, b]$  ;
- dérivable sur  $]a, b[$ .

Si  $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in ]a, b[, m \leq f'(x) \leq M$  alors :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

#### b. Seconde inégalité

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $I$ .

Si  $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f'(x)| \leq k$ , alors :

$$\forall (a, b) \in I^2, |f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$$

### 2. Application classique aux suites du type : $u_{n+1} = f(u_n)$

On suppose que :

- $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f'(x)| \leq k \in ]-1, 1[$  ;
- $(u_n)$  est convergente vers une limite  $l$ .

Dans ce cas, en utilisant la seconde inégalité des accroissements finis et en posant :

$$b = u_n; a = l,$$

$$|f(u_n) - f(l)| \leq k|u_n - l|$$

Or, d'après le théorème du point fixe :  $l = f(l)$ . Dès lors :

$$|u_{n+1} - l| \leq k|u_n - l|$$

On en déduit que :

$$|u_n - l| \leq k|u_{n-1} - l|$$

$$|u_n - l| \leq k|u_{n-2} - l|$$

...

$$|u_1 - l| \leq k|u_0 - l|$$

Par multiplications membre à membre :

$$|u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|$$

$$k \in ]-1, 1[ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - l| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$$