

## FONCTIONS GENERATRICES

NB : les fonctions génératrices n'ont jamais été au programme de prépa HEC. Leur connaissance est toutefois essentielle car elles permettent de démontrer simplement certaines formules du programme :  $E(X)$  et  $V(X)$  pour  $X \rightarrow B(n; p)$ ,  $X \rightarrow G(p)$  et  $X \rightarrow P(\lambda)$ .

### 1°) Principes

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle discrète. On appelle fonction génératrice de  $X$ , notée  $G$  la

fonction de  $t$  telle que  $G(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} t^k P[X = k]$

- a) Calculer  $G(1)$
- b) Calculer  $G'(1)$  et en déduire une expression de  $E(X)$
- c) Calculer  $G''(1)$
- d) Exprimer  $V(X)$  en fonction de  $G'(1)$  et  $G''(1)$

### 2°) Retrouver $E(X)$ et $V(X)$ pour $X$ qui suit une loi :

- a) Binomiale
- b) Géométrique
- c) de Poisson

1°)a)  $G(1) = \sum_{k \in X(\Omega)} 1^k P[X = k] = \sum_{k \in X(\Omega)} P[X = k] = 1$  puisque  $X$  suit une loi discrète.

b)  $G'(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} k t^{k-1} P[X = k]$  donc :  $G'(1) = \sum_{k \in X(\Omega)} k 1^{k-1} P[X = k] = \sum_{k \in X(\Omega)} k P[X = k] = E(X)$

c)  $G''(t) = \left( \sum_{k \in X(\Omega)} k t^{k-1} P[X = k] \right)' = \sum_{k \in X(\Omega)} k(k-1) t^{k-2} P[X = k]$

donc  $G''(1) = \sum_{k \in X(\Omega)} k(k-1) 1^{k-2} P[X = k] = \sum_{k \in X(\Omega)} k(k-1) P[X = k] = E(X(X-1))$

d) D'après la formule de Koenig-Huyghens :  $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ . Or :

$X^2 = X^2 - X + X = X(X-1) + X$  donc :  $V(X) = E[X(X-1)] + E(X) - [E(X)]^2$  soit encore :

$$\boxed{V(X) = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2}$$

$$2^{\circ}) a) X \rightarrow B(n; p) \Leftrightarrow X(\Omega) = [0; n] \cap \mathbb{N} \text{ et } P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k q^{n-k}$$

$$\text{donc : } G(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} t^k P[X=k] = \sum_{k=0}^n t^k \binom{n}{k} \cdot p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (pt)^k q^{n-k} = (pt+q)^n \text{ d'après}$$

la formule du binôme de Newton :  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (a)^k b^{n-k} = (a+b)^n$ . Dès lors :

$$G'(t) = n(pt+q)^{n-1} p = np(pt+q)^{n-1} \text{ et } G''(t) = n(n-1)p(pt+q)^{n-2} p = n(n-1)p^2(pt+q)^{n-2} \text{ donc :}$$

$$G'(1) = np(p+q)^{n-1}. \text{ Or } p+q=1 \text{ donc : } G'(1) = E(X) = np$$

$$G''(1) = n(n-1)p^2.$$

D'où :

$$V(X) = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2.$$

Donc finalement :  $V(X) = np(1-p) = npq$ .

$$b) X \rightarrow G(p) \Leftrightarrow \begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ P[X=k] = q^{k-1} p \end{cases}$$

$$G(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} t^k P[X=k] = \sum_{k=1}^{+\infty} t^k q^{k-1} p = \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{+\infty} t^k q^k = \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{+\infty} (tq)^k. \text{ On reconnaît une série géométrique de premier terme } (tq)^1 = tq \text{ et de raison } tq.$$

Donc en utilisant la formule [1<sup>er</sup> terme/(1-raison)], on a :  $G(t) = \frac{p}{q} \frac{tq}{1-tq}$ . En simplifiant par

$$q : G(t) = \frac{tp}{1-tq}$$

$$G'(t) = \frac{p(1-tq) - tp(-q)}{(1-tq)^2} = \frac{p - tpq + tpq}{(1-tq)^2} = \frac{p}{(1-tq)^2} \text{ donc } G'(1) = E(X) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$G''(t) = \left[ \frac{p}{(1-tq)^2} \right]' = - \frac{2p(1-tq)^{-1} q}{(1-tq)^4} = \frac{2pq}{(1-tq)^3}$$

$$\text{donc } G''(1) = E[X(X-1)] = \frac{2pq}{(1-q)^3} = \frac{2pq}{p^3} = \frac{2q}{p^2}$$

$$\text{d'où finalement : } V(X) = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{2q + p - 1}{p^2} =$$

$$\frac{2q - (1-p)}{p^2}, \text{ donc } \boxed{V(X) = \frac{q}{p^2}}$$

$$d) \quad X \rightarrow P(\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} X(\Omega) = N \\ P[X = k] = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \end{cases}$$

$$G(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} t^k P[X = k] = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda t - \lambda}$$

$$G'(t) = E(X) = \lambda e^{\lambda t - \lambda} \text{ donc } G''(1) = \lambda e^{\lambda - \lambda} = \lambda e^0 = \lambda$$

$$G''(t) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t - \lambda} \text{ donc } G''(1) = \lambda^2.$$

Donc :

$$V(X) = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$