Fonctions numériques à 2 variables réelles

1. Fonctions continues sur R^2

a. Exemples de fonctions réelles de 2 variables réelles
   1) Fonctions coordonnées $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$
   2) Fonctions polynomiales de 2 variables réelles
      1. On appelle fonction polynominale de R^2 dans R toute combinaison linéaire de fonctions de la forme $(x, y) \mapsto x^i y^i$, où $(i, j) \in N^2$
      2. Toute fonction polynomiale de R^2 dans R est continue sur R^2

b. Distance euclidienne $d(A, B)$ de deux points $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ de R^2 : $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

c. Continuité d'une fonction définie sur R^2 et à valeurs dans R : une fonction *f* de 2 variables, définie sur R^2, est continue en un point (x_0, y_0) de R^2 si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall (x, y) \in R^2 \text{: } d[(x, y), (x_0, y_0)] < r \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

d. Opérations sur les fonctions continues
   1) Les fonctions coordonnées sont continues sur R^2
   2) La somme, le produit, le quotient (quand le dénominateur est non nul) de 2 fonctions continues sont continus
   3) Les fonctions polynomiales de 2 variables réelles sont continues sur R^2
   4) La composée d'une fonction continue à valeurs dans un intervalle *I* de R^2 par une fonction continue sur R^2 à valeurs dans *R* est continue

2. Calcul différentiel pour les fonctions définies sur R^2

a. Ordre 1

   1) Dérivées partielles d'ordre 1

      1. Si pour toute valeur de *y* fixée, la fonction de *x* défnie par $x \mapsto f(x, y)$ est dérivable sur *R*, alors la fonction qui a tout couple (x, y) de R^2 associe la dérivée de la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est la dérivée partielle d'ordre 1 de f par rapport à la première variable qui est *x*. On la note $\partial_1(f)$

      2. Si pour toute valeur de *x* fixée, la fonction de *y* défnie par $y \mapsto f(x, y)$ est dérivable sur *R*, alors la fonction qui a tout couple (x, y) de R^2 associe la dérivée de la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est la dérivée partielle d'ordre 1 de f par rapport à la deuxième variable qui est *y*. On la note $\partial_2(f)$

   2) Fonctions de classe C^1 : *f* est de classe C^1 sur R^2 lorsque f admet des dérivées partielles sur R^2 et que chacune de ces dérivées partielles est continue sur R^2

3) Toute fonction de classe C^1 sur R^2 est continue sur R^2

4) Opérations sur les fonctions de classe C^1 : la somme, le produit et le quotient (quand le dénominateur est non nul) de fonctions de classe C^1 sur R^2 sont de classe C^1 sur R^2

5) Les fonctions polynomiales sont de classe C^1 sur R^2

6) Gradient de f en un point (x,y) = vecteur de $\mathcal{M}_{2,1}(R) = \nabla(f)(x,y)$ avec :

$$\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1(f)(x,y) \\ \partial_2(f)(x,y) \end{pmatrix}$$

7) Développement limité d'ordre 1 d'une fonction de classe C^1
Soit un point (x,y) de R^2. Si f est de classe C^1, alors $\forall(h,k) \in R\text{x}R$:
$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \partial_1(f)(x,y)h + \partial_2(f)(x,y)k + \sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)$$
où ε est une fonction continue qui s'annule en (0,0)

On a aussi :
$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + {}^t\nabla(f)(x,y)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)$$

8) Unicité du DL1 de f en (x,y)

b. Ordre 2

1) Dérivées partielles d'ordre 2
Soit f une fonction admettant des dérivées partielles d'ordre 1 sur R^2
- si $\partial_1(f)$ admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable sur R^2, alors f admet une dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la première variable sur R^2 ; on la note $\partial^2_{1,1}(f) = \partial_1[\partial_1(f)]$;
- si $\partial_1(f)$ admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable sur R^2, alors f admet une dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la première variable puis par rapport à la deuxième variable sur R^2 ; on la note $\partial^2_{2,1}(f) = \partial_2[\partial_1(f)]$;
- si $\partial_2(f)$ admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable sur R^2, alors f admet une dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la deuxième variable puis par rapport à la première variable sur R^2 ; on la note $\partial^2_{1,2}(f) = \partial_1[\partial_2(f)]$;
- si $\partial_2(f)$ admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable sur R^2, alors f admet une dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la deuxième variable sur R^2 ; on la note $\partial^2_{2,2}(f) = \partial_2[\partial_2(f)]$.

2) Fonctions de classe C^2 : f est de classe C^2 sur R^2 si f admet des dérivées partielles secondes sur R^2 et que chacune des 4 dérivées partielles est continue sur R^2

3) Une fonction de classe C^2 est de classe C^1

4) Opérations sur les fonctions de classe C^2 : la somme, le produit et le quotient (quand le dénominateur est non nul) de fonctions de classe C^2 sur R^2 sont de classe C^2 sur R^2

5) Théorème de Schwarz : si *f* est de classe C^2, alors $\partial_{1,2}^2(f) = \partial_{2,1}^2(f)$

6) Matrice hessienne d'une fonction de 2 variables réelles en un point (x, y) :

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2(f)(x,y) & \partial_{1,2}^2(f)(x,y) \\ \partial_{2,1}^2(f)(x,y) & \partial_{2,2}^2(f)(x,y) \end{pmatrix}$$

7) Remarque : si si *f* est de classe C^2, sa matrice hessienne en tout point (x, y) de R^2 est symétrique

8) Développement limité d'ordre 2 d'une fonction de classe C^2

Soit un point (x, y) de R^2. Si *f* est de classe C^2, alors $\forall(h,k) \in R\text{x}R$:
$f(x+h, y+k)$
$$= f(x,y) + \partial_1(f)(x,y)h + \partial_2(f)(x,y)k$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\partial_{1,1}^2(f)(x,y)h^2 + 2\partial_{1,2}^2(f)(x,y)hk\right.$$
$$\left.+ \partial_{2,2}^2(f)(x,y)k^2\right) + (h^2+k^2).\varepsilon(h,k)$$
où ε est une fonction continue qui s'annule en (0,0)

On a aussi :
$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + {}^t\nabla(f)(x,y)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h\ k)\nabla^2(f)(x,y)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (h^2+k^2).\varepsilon(h,k)$$

9) Unicité du DL2 de *f* en (x, y)

3. Extrêma d'une fonction de 2 variables réelles

a. Eléments de topologie de R^2

1) Boule de R^2

Soit *A* un point de R^2 et soit $r \in R*+$. On appelle boule ouverte de centre *A* et de rayon *r*, l'ensemble $B(A,r)$ des points *M* de R^2 tels que : $d(A,M) < r$.

Si $d(A,M) \leq r$, boule est fermée. On la note alors $B_f(A,r)$

2) Partie ouverte de R^2

Une partie *U* de R^2 est ouverte si, pour tout point *A* de *U*, il existe une boule ouverte de centre *A*, entièrement incluse dans *U*

3) Partie fermée de R^2

Une partie *U* de R^2 est ouverte si son complémentaire est ouvert

4) Partie bornée de R^2

Une partie *U* de R^2 est bornée si $\exists k > 0 / \forall (x,y) \in U, x^2 + y^2 \leq K$

Une partie *U* de R^2 est bornée si elle est incluse dans une boule de centre (0,0)

b. Maximum local et minimum local d'une fonction de 2 variables réelles

f admet un maximum local en (x_0, y_0) si $\exists$ une boule B centrée en (x_0, y_0) telle que, pour tout point (x,y) de $B \cap U$: $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$

f admet un minimum local en (x_0, y_0) si $\exists$ une boule B centrée en (x_0, y_0) telle que, pour tout point (x,y) de $B \cap U$: $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$

c. Extremum global d'une fonction de 2 variables réelles sur une partie de R^2

f admet des extrema globaux si les inégalités ci-dessus sont vraies sur tout *U*.

d. Une fonction continue sur une partie fermée et bornée de R^2 est bornée et atteint ses bornes sur cette partie.

En d'autres termes, elle y admet un maximum global et un minimum global

e. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local

Soit *f* une fonction admettant des dérivées partielles d'ordre 1 sur *U*.
On appelle point critique de f sur U, tout point (x, y) de U tel que : $\nabla(f)(x, y) = 0$

Soit *f* une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de R^2. Si *f* admet un extremum (local ou global) en un point *A* de U, alors *A* est un point critique de *f*.

La réciproque est fausse : un point critique n'est pas nécessairement un extremum

Si U n'est pas un ouvert, alors *f* peut avoir un extremum global ou local en un point autre qu'un point critique.

f. Condition suffisante d'existence d'un extremum local

Soit *f* une fonction de classe C^2 sur un ouvert U de R^2 et (x_0, y_0) un point critique de *f* sur *U*.

Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont strictement positives, alors *f* admet un minimum local en (x_0, y_0)

Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont strictement négatives, alors *f* admet un maximum local en (x_0, y_0)

g. Point col ou point selle

Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont non nulles et de signes opposés, alors *f* n'admet pas d'extremum en (x_0, y_0) : le point (x_0, y_0) est un point col ou point selle

h. Cas où l'une des valeurs propres de la hessienne est nulle

Si l'une des valeurs propres de la hessienne est nulle, on ne peut rien conclure

i. Structure de l'étude des extrema d'une fonction *f* à 2 variables

1) **Détermination des dérivées partielles d'ordre 1** : $\partial_1(f)$ et $\partial_2(f)$

2) **Recherche des points critiques par résolution** du système :

$$\nabla(f)(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{cases}$$

Chaque couple de solutions (x_0, y_0) est un point critique

3) **Détermination des dérivées partielles d'ordre 2** : $\partial^2_{1,1}(\mathrm{f})$, $\partial^2_{2,1}(\mathrm{f})$, $\partial^2_{1,2}(\mathrm{f})$ et $\partial^2_{2,2}(\mathrm{f})$ et écriture de la hessienne :

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(f)(x,y) & \partial^2_{1,2}(f)(x,y) \\ \partial^2_{2,1}(f)(x,y) & \partial^2_{2,2}(f)(x,y) \end{pmatrix}$$

4) **Recherche d'extrema locaux par recherche des valeurs propres** de chaque matrice $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ associée à chaque point critique (x_0, y_0)

- Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont strictement positives, alors *f* admet un minimum local en (x_0, y_0)

- Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont strictement négatives, alors *f* admet un maximum local en (x_0, y_0)

- Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont non nulles et de signes opposés, alors *f* n'admet pas d'extremum en (x_0, y_0) : le point (x_0, y_0) est un point col ou point selle

- Si l'une des valeurs propres de la $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ est nulle, on ne peut rien conclure

5) **Recherche d'extrema globaux** en démontrant, le cas échéant, que :

- Un minimum local $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ est aussi un minimum global si $\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$, où *U* est une partie de R^2

- Un maximum local $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ est aussi un maximum global si $\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$, où *U* est une partie de R^2

6) **Justification, le cas échéant, de l'absence d'extrema globaux** en considérant un cas particulier du type $\mathrm{f}(a,y) = g(y)$ où a est, en principe, suggéré par l'énoncé. Dès lors :

- Si $\lim_{\mathrm{y}\to+\infty} g(y) = +\infty$ alors g et a fortiori *f* n'admettent pas de maximum global

- Si $\lim_{\mathrm{y}\to-\infty} g(y) = -\infty$ alors g et a fortiori *f* n'admettent pas de minimum global