

Montrer que F n'est pas un espace vectoriel

On suppose que $F \subset E$ et on va démontrer que F n'est pas un sous-espace vectoriel de E .

1. Première méthode : $0_E \notin F$

Dans ce cas, F n'est pas un sous-espace vectoriel de E ; donc F ne peut être un espace vectoriel ;

Rappels sur les éléments neutres :

$$0_{R^n} = (0, 0, \dots, 0)$$

$$0_{R_n[X]} = P(X) \text{ avec } P(X) = 0$$

$$0_{\mathcal{M}_{n,p}(R)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$0_{R^N} = u_n \text{ avec } u_n = 0$$

$$\text{Exemple : } F = \{A = (x, y) \in R^2, x + y = 1\}$$

$0_{R^2} = (0, 0)$. Or, dans ce cas : $x + y = 0 + 0 = 0 \neq 1$. Donc : $0_{R^2} \notin F$. Ainsi F n'est pas un sous-espace vectoriel de R^2 ; par conséquent, F ne peut être un espace vectoriel.

2. Première méthode : $\forall (A, B) \in F^2, A + B \notin F$

Dans ce cas, F n'est pas un sous-espace vectoriel de E donc F ne peut être un espace vectoriel. Il suffit, pour cela, de montrer, sur un exemple, c'est-à-dire en faisant prendre des valeurs particulières à A et B , que $A + B \notin F$

$$\text{Exemple : } F = \{A = (x, y) \in R^2, x \cdot y = 0\}$$

Soit $A = (1, 0) \in F$ car $1 \cdot 0 = 0$ et $B = (0, 1) \in F$ car $0 \cdot 1 = 0$

$A + B = (1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$. Or : $1 \cdot 1 \neq 0$. Donc $A + B \notin F$

Ainsi, F n'est pas un sous-espace vectoriel de R^2 ; par conséquent, F ne peut être un espace vectoriel.

3. Première méthode : $\forall A \in F, \forall \lambda \in R, \lambda A \in F$

Dans ce cas, F n'est pas un sous-espace vectoriel de E ; donc F ne peut être un espace vectoriel. Il suffit, pour cela, de montrer, sur un exemple, c'est-à-dire en faisant prendre des valeurs particulières à A et λ , que $\lambda A \notin F$

$$\text{Exemple : } F = \{A = (x, y) \in R^2, x^2 + y = 0\}$$

Soit $A = (1, -1) \in F$ car $1^2 - 1 = 0$.

En revanche : $2 \cdot (1, -1) = (2, -2)$. Et $2^2 - 2 = 4 - 2 = 2 \neq 0$. Donc $\lambda A \notin F$ pour $\lambda = 2$