Exemple de couple de variables aléatoires discrètes

Tirage sans remise, min et max des résultats obtenus

On dispose d'une urne qui contient n boules numérotées de 1 à n, avec $n \in N^*$
On tire 2 boules, une à une, sans remise.
On note X_1 le premier numéro sorti et X_2 le second numéro sorti.
Soit $X = \min(X_1, X_2)$ et $Y = \max(X_1, X_2)$

1. Détermination de la loi (conjointe) du couple (X_1, X_2)

   $X_1(\Omega) = [1, n]$ et $X_2(\Omega) = [1, n] - X_1$

   On cherche à déterminer $P(X_1 = i \cap X_2 = j)$
   Les tirages étant sans remise, il est impossible d'obtenir 2 fois le même numéro. Donc :
   Si $i = j$ alors $P(X_1 = i \cap X_2 = j) = 0$

   Si $i \neq j$, on a 1 chance sur n d'obtenir un numéro donné au premier tirage. Et, au second tirage, comme la boule tirée au premier tirage n'a pas été remise dans l'urne, on a 1 chance sur $n - 1$ d'obtenir un autre numéro donné.
   Ainsi :
   Si $i \neq j$ alors $P(X_1 = i \cap X_2 = j) = \frac{1}{n}\frac{1}{n-1}$

2. Détermination de la loi du couple (X, Y)

   $X(\Omega) = [1, n-1]$ et $Y(\Omega) = [2, n]$
   Il n'est pas possible que le min soit supérieur au max. Donc :
   Si $i \geq j$ alors $P(X = i \cap Y = j) = 0$

   Si $i < j$ alors $P(X = i \cap Y = j) = P[(X_1 = i \cap X_2 = j) \cup (X_1 = j \cap X_2 = i)]$
   En d'autres termes :
   Si $i < j$ alors $P(X = i \cap Y = j) = P(X_1 = i \cap X_2 = j) + P(X_1 = j \cap X_2 = i)$
   En effet, si le min est égal à i et le max est égal à j :
   - Soit le premier tirage permet d'obtenir le plus petit (min) des 2 numéros et, dans ce cas, le plus grand des 2 numéros est obtenu au second tirage. En d'autres termes : $X = \min(X_1, X_2) = X_1$
   - Soit le premier tirage permet d'obtenir le plus grand des 2 numéros et, dans ce cas, le plus petit (min) des 2 numéros est obtenu au second tirage. En d'autres termes : $X = \min(X_1, X_2) = X_2$

   Soit encore : Si $i < j$ alors $P(X = i \cap Y = j) = \frac{1}{n}\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\frac{1}{n-1}$
   Finalement :
   Si $i < j$ alors $P(X = i \cap Y = j) = \frac{2}{n(n-1)}$

3. Détermination de la loi (marginale) de X

$$P(X=i)=\sum_{j\in Y(\Omega)}P(X=i\cap Y=j)=\sum_{j=2}^{n}P(X=i\cap Y=j)$$

$$P(X=i)=\sum_{j=2}^{i}P(X=i\cap Y=j)+\sum_{j=i+1}^{n}P(X=i\cap Y=j)$$

$$P(X=i)=0+\sum_{j=i+1}^{n}\frac{2}{n(n-1)}=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{j=i+1}^{n}1=\frac{2}{n(n-1)}[n-(i+1)+1]$$

Finalement :

$$P(X=i)=\frac{2(n-i)}{n(n-1)}$$

4. Détermination de la loi (marginale) de Y

$$P(Y=j)=\sum_{i\in X(\Omega)}P(X=i\cap Y=j)=\sum_{i=1}^{n-1}P(X=i\cap Y=j)$$

$$P(Y=j)=\sum_{i=1}^{j-1}P(X=i\cap Y=j)+\sum_{i=j}^{n-1}P(X=i\cap Y=j)$$

$$P(Y=j)=\sum_{i=1}^{j-1}\frac{2}{n(n-1)}+0=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{j-1}1$$

Finalement :

$$P(Y=i)=\frac{2(j-1)}{n(n-1)}$$

5. Calcul de l'espérance et de la variance de X et de Y

- Calcul de $E(X)$

$$E(X)=\sum_{i\in X(\Omega)}iP(X=i)=\sum_{i=1}^{n-1}i\frac{2(n-i)}{n(n-1)}=\frac{2}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}i-\frac{2}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}i^2$$

$$E(X)=\frac{2n(n-1)}{2(n-1)}-\frac{2(n-1)(n)(2(n-1)+1)}{6n(n-1)}=n-\frac{2n-1}{3}$$

Finalement :

$$E(X)=\frac{n+1}{3}$$

- Calcul de $E(Y)$

$$E(Y) = \sum_{j\in Y(\Omega)} jP(Y=j) = \sum_{j=2}^{n} j\,\frac{2(j-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{j=2}^{n} j^2 - \sum_{j=2}^{n} j\right)$$

$$E(Y) = \frac{2}{n(n-1)}\left[\frac{n(\,n+1)(2n+1)}{6} - 1 - \frac{n(n+1)}{2} + 1\right]$$
$$E(Y) = \frac{2}{(n-1)}\left[\frac{(\,n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)}{2}\right]$$
$$E(Y) = \frac{2}{(n-1)}\left[\frac{(\,n+1)(2n+1) - 3(n+1)}{6}\right]$$
$$E(Y) = \frac{2}{(n-1)}\left[\frac{(\,n+1)(2n+1-3)}{6}\right]$$
$$E(Y) = \frac{2}{(n-1)}\left[\frac{(\,n+1)(2n-2)}{6}\right]$$
$$E(Y) = \frac{2}{(n-1)}\left[\frac{2(\,n+1)(n-1)}{6}\right]$$

Finalement :

$$E(Y) = \frac{2(n+1)}{3}$$