Ecriture matricielle

1. Matrice d'une application linéaire

a. Rappels de cours

Soit E un espace vectoriel de dimension n, de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$

Soit F un espace vectoriel de dimension p, de base $\mathcal{B}' = \left(e'_1, e'_2, \dots, e'_p\right)$

Si f est une application linéaire de E dans F, la matrice de f relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est la matrice dont la j-ème colonne est formée des coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

b. Exemple 1

Soit f un endomorphisme de $R_2[X]$ tel que : $f(P) = P'(X)$

Ecrire $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $R_2[X]$

On sait que : $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$

Pour écrire $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f$, il convient de déterminer les coordonnées de $f(1), f(X), f(X^2)$ dans la base $(1, X, X^2)$.

De façon générale :

$f(P) = P'(X)$

Donc, en particulier :

$f(1) = 0 = 0.1 + 0.X + 0.X^2$

$f(X) = 1 = 1.1 + 0.X + 0.X^2$

$f(X^2) = 2X = 0.1 + 2.X + 0.X^2$

Dès lors :

$$A = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}\, f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c. Exemple 2

Soit une application linéaire $f : R_2[X] \to R^3$ telle que : $f(P) = (P(1), P(2), P(3))$

Ecrire $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} f$ où $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$' sont les bases canoniques de $R_2[X]$ et de R^3

Et on sait que $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = \big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\big)$

Il convient alors de déterminer les coordonnés de $f(1), f(X), f(X^2)$ dans la base $\mathcal{B}'$. En d'autres termes, il s'agit d'exprimer $f(1), f(X), f(X^2)$ en fonction de $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$

Ainsi :

$f(1) = (P(1), P(2), P(3))$ pour $P = 1$.

Dès lors : $f(1) = (1,1,1) = 1.(1,0,0) + 1.(0,1,0) + 1.(0,0,1)$

De même :

$f(X) = (P(1), P(2), P(3))$ pour $P = X$.

Dès lors : $f(X) = (1,2,3) = 1.(1,0,0) + 2.(0,1,0) + 3.(0,0,1)$

Et enfin :

$f(X^2) = (P(1), P(2), P(3))$ pour $P = X^2$.

Dès lors : $f(X^2) = (1,4,9) = 1.(1,0,0) + 4.(0,1,0) + 9.(0,0,1)$

Ainsi :

$$A = \underset{\mathcal{B},\mathcal{B}'}{\mathrm{mat}} f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

2. Matrice d'une famille de *p* vecteurs dans une base de *n* vecteurs

a. Rappels de cours

Soit un espace vectoriel E de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$

Soit une famille $\mathcal{F}$ de p vecteurs de E : $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$

La matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(R)$ dont les coefficients de la *j-ème* colonne sont les coordonnées de f_j dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$

Si la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ est inversible, alors $\mathcal{F}$ est une base de E.

Dans l'hypothèse où $\mathcal{F}$ est une base de E, la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{F}}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{F}$

b. Exemple

Soit : $\boldsymbol{\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)}$ avec $\boldsymbol{f_1 = (1, 1, 2), f_2 = (0, -1, 0), f_3 = (0, 0, -1)}$

Ecrire la matrice *P* de la famille $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ dans la base canonique de $\boldsymbol{R^3}$ et en déduire que $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ est une base de $\boldsymbol{R^3}$

$f_1 = (1,1,2) = 1.(1,0,0) + 1.(0,1,0) + 2.(0,0,1)$

$f_2 = (1,-1,0) = 0.(1,0,0) - 1.(0,1,0) + 0.(0,0,1)$

$f_3 = (0,0,-1) = 0.(1,0,0) + 0.(0,1,0) - 1.(0,0,1)$

Ainsi :

$$P = \operatorname*{mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour établir que $\mathcal{F}$ est une base, il convient de démontrer que P est inversible. Or, P est une matrice triangulaire sans 0 sur la diagonale. Donc P est inversible et $\mathcal{F}$ est une base de R^3.