

Du bon usage de la dimension d'un sous-espace vectoriel

1. Définition de la dimension d'un espace vectoriel

La dimension d'un espace vectoriel E est le nombre n de vecteurs commun à toutes les bases de E .

2. Propriétés

- Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E . Dans ce cas : $\dim F \leq \dim E$
- Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $\dim F = \dim E$. Dans ce cas : $F = E$

3. Dimension des espaces vectoriels de référence

$$\dim R^n = n$$

$$\dim M_{n,p}(R) = np$$

$$\dim R_n[X] = n + 1$$

4. Cardinal d'une famille \mathcal{F} d'un espace vectoriel F et simplification de la justification que \mathcal{F} est une base

Soit \mathcal{F} une famille à n vecteurs de l'espace vectoriel F de dimension n . En d'autres termes : $\text{Card } \mathcal{F} = \dim F$. Dans ce cas :

\mathcal{F} est une base de $F \Leftrightarrow \mathcal{F}$ est une famille libre $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ est une famille génératrice

En d'autres termes, dans ce cas, pour montrer que \mathcal{F} est une base, il suffit de montrer que \mathcal{F} est libre ou que \mathcal{F} est génératrice

Cette méthode est praticable si $\dim F$ est connue, c'est-à-dire si cette dimension est fournie par l'énoncé ou si elle a été établie dans une question précédente ou si F est un espace vectoriel de référence dont la dimension est connue dans le cadre du programme.

En particulier :

- Si $F = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ alors $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de F . Si par ailleurs $\dim F = n$ alors $\text{Card } \mathcal{F} = \dim F$; dès lors : \mathcal{F} est une base
- Si $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille libre de F . Si par ailleurs $\dim F = n$ alors $\text{Card } \mathcal{F} = \dim F$; dès lors : \mathcal{F} est une base
 - Si $\mathcal{F} = (e_1)$ et si $e_1 \neq \{0_F\}$ alors \mathcal{F} est libre. Dès lors, dans l'hypothèse où $\text{Card } \mathcal{F} = \dim F = 1$, \mathcal{F} est une base
 - Si $\mathcal{F} = (e_1, e_2)$ et si e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires, alors \mathcal{F} est libre. Dès lors, dans l'hypothèse où $\text{Card } \mathcal{F} = \dim F = 2$, \mathcal{F} est une base
 - Dans tous les autres cas, pour montrer que \mathcal{F} est libre, il convient de démontrer que

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$$