

Pratique des développements limités

1. Rappels du cours

- a. Développements limités d'ordre 2 du programme au voisinage de 0

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$$

En faisant prendre successivement à α les valeurs $\frac{1}{2}$ et -1 , on obtient les cas particuliers suivants :

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$$

$$(1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$$

- b. Lecture directe de $f(0)$, $f'(0)$ et de l'équation de la tangente en 0

La formule de Taylor-Young fournit le DL2 de f en x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2$$

En posant : $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + f'(0).x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

Ainsi :

$f(0)$ est le terme constant du DL

$f'(0)$ est le coefficient de x

$y = f(0) + f'(0).x$ est l'équation de la tangente en 0

Si $f''(0) > 0$, la courbe de f est au-dessus de sa tangente en 0 ; sinon f est en dessous de sa tangente en 0

En cas d'étude de dérivabilité en un point $x_0 \neq 0$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- c. Utilisation des DL1 pour retrouver les équivalents usuels au voisinage de 0

$$e^x = 1 + x + o(x) \Rightarrow e^x - 1 = x + o(x) \Rightarrow e^x - 1 \sim x$$

$$\ln(1+x) = x + o(x) \Rightarrow \ln(1+x) \sim x$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) \Rightarrow (1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(x) \Rightarrow (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

- d. Cas particulier de $\ln x$ au voisinage de 1

$$\text{Au voisinage de 0 : } \ln(1+x) \sim x$$

$$\text{Soit : } u = x + 1 \Rightarrow x = u - 1$$

En outre, si x est au voisinage de 0, alors u est au voisinage de 1.

$$\text{Ainsi, au voisinage de 1 : } \ln u \sim u - 1$$

2. Exemple d'étude de prolongement par continuité et de dérivabilité en 0

Soit la fonction f définie sur $]0, 1[$ par : $f(x) = \frac{-x}{(1-x) \cdot \ln(1-x)}$

Démontrer que f est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement est dérivable en 0 en déterminant $f(0)$ et $f'(0)$

1^{ère} méthode de détermination du DL2 : on commence par remplacer $\ln(1-x)$ par son DL2

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Ainsi :

$$f(x) = \frac{-x}{(1-x) \cdot \ln(1-x)} = \frac{-x}{(1-x) \left[-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right]} = \frac{x}{(1-x) \left[x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right]}$$

$$f(x) = \frac{1}{(1-x) \left[1 + \frac{x}{2} + o(x) \right]} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} - x + o(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + o(x)}$$

Or :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$$

Finalement :

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + o(x) \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

2^{ème} méthode : on remplace, dès le début des calculs, $\ln(1-x)$ et $\frac{1}{1-x}$ par leurs DL respectifs

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$$

Ainsi :

$$f(x) = \frac{-x}{(1-x) \cdot \ln(1-x)} = \frac{1}{(1-x)} \cdot \frac{-x}{\ln(1-x)}$$

Dès lors :

$$f(x) = [1 + x + x^2 + o(x^2)] \cdot \frac{-x}{-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$$

Par simplification par x et troncature à l'ordre 1 :

$$f(x) = [1 + x + o(x)] \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + o(x)}$$

Or :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x) \Rightarrow \frac{1}{1 + \frac{x}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$$

$$f(x) = [1 + x + o(x)] \cdot \left[1 - \frac{x}{2} + o(x)\right]$$

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + x + o(x)$$

Finalement :

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + o(x) \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

3. Exemple d'étude de prolongement par continuité et de dérivabilité 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{x \ln x}$

Démontrer que f est prolongeable par continuité en 1 et que son prolongement est dérivable en 1 en déterminant $f(1)$ et $f'(1)$

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{x \ln x} \sim \frac{3 \cdot (x-1)}{(x-1)} = 3$$

Donc f est prolongeable par continuité en 1 : $f(1) = 3$

Pour déterminer $f'(1)$, il convient de déterminer la limite en 1 du taux d'accroissement :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\frac{(x+2)(x-1)}{x \ln x} - 3}{x - 1} = \frac{(x+2)(x-1) - 3x \ln x}{(x-1)x \ln x}$$

Soit : $u = x - 1 \Rightarrow x = u + 1$

Ainsi, si x est au voisinage de 1 alors u est au voisinage de 0 :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{(u+3)u - 3(u+1) \cdot \ln(u+1)}{u \cdot (u+1) \cdot \ln(u+1)}$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{u^2 + 3u - (3u+3) \left[u - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \right]}{[u^2 + u] \cdot \left[u - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \right]}$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{u^2 + 3u - 3u^2 - 3u + \frac{3}{2}u^2 + o(u^2)}{u^2}$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{u^2 - 3u^2 + \frac{3}{2}u^2 + o(u^2)}{u^2}$$

En simplifiant par u^2 :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\frac{1}{2}$$

Ainsi :

$$f'(1) = -\frac{1}{2}$$