

Exemple d'étude d'une suite et d'une série dont la suite est le terme général

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1. Etude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Commençons par étudier le sens de variation de la suite ce qui permettra de savoir s'il convient, dans un deuxième temps, de rechercher un majorant (si la suite est croissante) ou un minorant (si la suite est décroissante).

a. Etude du sens de variation

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n}$$

$$e^{-u_n} > 1 \Leftrightarrow -u_n > 0 \Leftrightarrow u_n < 0$$

Or $u_0 = 1 > 0$. Il semble donc que, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, alors $u_n > 0$.
Démontrons alors, par récurrence la propriété $P(n) : u_n > 0$

Initialisation : $u_0 = 1 > 0$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : Supposons que $P(n)$ est vraie. Démontrons que, dans ce cas, $P(n+1)$ l'est également c'est-à-dire que $u_{n+1} > 0$

Comme une exponentielle est toujours positive, $e^{-u_n} > 0$ et comme, par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$, $u_n e^{-u_n} = u_{n+1} > 0$ ce qui achève la preuve

Ainsi, comme $u_n > 0$, $e^{-u_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Finalement : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

b. Etude de la convergence

On a établi que $0 < u_n$. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée

Finalement : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente

c. Détermination de la limite

Par hypothèse : $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = x e^{-x}$

La limite l est solution de l'équation : $l = f(l) \Leftrightarrow l = l e^{-l} \Leftrightarrow e^{-l} = 1$

Finalement : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l = 0$

2. Etude de la série dont la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est le terme général

Ainsi, on s'intéresse à la convergence de la somme partielle $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

Le terme général ne rappelle pas de critère de convergence du programme. Or

Or :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = -u_n \Leftrightarrow u_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$$

Ainsi :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \ln(u_k) - \ln(u_{k+1}) = \ln(u_1) - \ln(u_{n+1})$$

Or : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l = 0$. Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = 0$

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_{n+1}) = -\infty$ et : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$

Finalement :

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

En d'autres termes, la suite convergente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est le terme général d'une série divergente.