CONVERGENCE EN PROBABILITE ET CONVERGENCE EN LOI

Rappels de cours

Définition

Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathrm{A}, \mathrm{P})$.
Pour tout entier naturel n, on note F_n la fonction de répartition de X_n.
Soit X une variable aléatoire également définie sur $(\Omega, \mathrm{A}, \mathrm{P})$ et de fonction de répartition F.
On dit que la suite $(X_n)_{n\in N}$ converge en loi vers X si, en tout point x où F est continue, on a :

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

Théorème

Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de variables aléatoires discrètes et X une variable aléatoire discrète.
On suppose que les X_n et X sont à valeurs dans Z.
La suite X_n converge en loi vers X si et seulement si :

$$\forall k \in Z, \lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$$

1. Convergence de la loi hypergéométrique vers la loi binômiale

On admet que $X_n \to$ H(N, n, p) $\Leftrightarrow$ $P(X_n = k) = \dfrac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Montrons que $\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$ où X suit une loi binomiale B(n,p)

Préliminaire 1

$$\binom{Np}{k} = \frac{(Np)!}{k!(Np-k)!} = \frac{Np(Np-1)...(Np-k+1)(Np-k)...2.1}{k!(Np-k)...2.1} = \frac{Np(Np-1)...(Np-k+1)}{k!}$$

Préliminaire 2

$$\binom{Nq}{n-k} = \frac{(Nq)!}{(n-k)!(Nq-n+k)!}$$

$$= \frac{Nq(Nq-1)...(Nq-n+k+1)(Nq-n+k)...2.1}{(n-k)!(Nq-n+k)...2.1} = \frac{Nq(Nq-1)...(Nq-n+k+1)}{(n-k)!}$$

Préliminaire 3

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{N(N-1)...(N-n+1)(N-n)...2.1}{n!(N-n)...2.1} = \frac{N(N-1)...(N-n+1)}{n!}$$

Préliminaire 4

Np(Np-1)…(Np-k+1) = (Np- 0)(Np-1)…[Np-(k-1)] $\approx$(Np)^k au voisinage de l'infini.

Préliminaire 5

Nq(Nq-1)…(Nq-n+k+1) = (Nq-0)(Nq-1)…[Nq-(n-k-1)] $\approx$(Nq)$^{n-k}$ au voisinage de l'infini.

Démonstration de la convergence

Donc : P[X_n=k] = $\dfrac{\dfrac{Np(Np-1)...(Np-k+1)}{k!}.\dfrac{Nq(Nq-1)...(Nq-n+k+1)}{(n-k)!}}{\dfrac{N(N-1)...(N-n+1)}{n!}}$

d'après les préliminaires 1 et 2 pour le numérateur et le préliminaire 3 pour le dénominateur. De plus, en réduisant le nombre de traits de fractions :

P[X_n=k] = $\dfrac{Np(Np-1)...(Np-k+1)Nq(Nq-1)...(Nq-n+k+1)}{k!(n-k)!}.\dfrac{n!}{N(N-1)...(N-N+1)}$.

Remarque 1 : $\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

Remarque 2 :

N(N-1)…(N-k+1) = (N-0)(N-1)…[N-(k-1)] $\approx$ N^k au voisinage de l'infini.

Ainsi : P[X_n=k] $\approx$ $\binom{n}{k}\dfrac{(Np)^k(Nq)^{n-k}}{N^k}$ au voisinage de l'infini, d'après les remarques 1 et 2 et les préliminaires 4 et 5.

En d'autres termes : P[X_n=k] $\approx$ $\binom{n}{k}\dfrac{N^k p^k N^{n-k} q^{n-k}}{N^k}$ au voisinage de l'infini. En simplifiant par N^k :

P[X_n=k] $\approx$ $\binom{n}{k}$p^{k}q^{n-k} ce qui correspond à l'expression d'une loi binômiale B(n ;p).

Conclusion :

H(N ; n ; p) converge vers B(n ; p) quand N est grand

NB : On utilisera l'approximation de la loi hypergéométrique par la loi binômiale lorsque N>10n.

2. Convergence de la loi binômiale vers la loi de Poisson

Rappel : X $\rightarrow$ B(n, p) $\Leftrightarrow \begin{cases} X(\Omega) = [0; n]xN \\ P[X = k] = C_n^k p^k q^{n-k} \end{cases}$

Soit λ = np soit p = $\dfrac{\lambda}{n}$. Dès lors :

P[X=k] = $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\left(\dfrac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \dfrac{\lambda^k}{k!}\dfrac{n!}{(n-k)!n^k} e^{(n-k)\ln(1-\frac{\lambda}{n})} = \dfrac{\lambda^k}{k!}\dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k}$ $e^{(n-k)\ln(1-\frac{\lambda}{n})}$.

Or : $\dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k} = \dfrac{(n-0)(n-1)...[n-(k-1)]}{n^k} \approx \dfrac{n^k}{n^k} = 1$.

De plus : ln(1+x) $\approx$ x au voisinage de 0. Or, si n est au voisinage de l'infini, alors $\dfrac{\lambda}{n}$ est au voisinage de 0. Par conséquent, pour n au voisinage de l'infini, on peur écrire :

ln(1-$\dfrac{\lambda}{n}$) $\approx$ - $\dfrac{\lambda}{n}$. Ainsi :

P[X=k] $\approx \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{(n-k)(-\frac{\lambda}{n})}$ pour n au voisinage de l'infini. Et, en développant l'exponentielle :

P[X=k] $\approx \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda+\frac{\lambda k}{n}}$. Mais si n tend vers l'infini, alors $\dfrac{\lambda k}{n}$ tend vers 0. Finalement :

P[X=k] $\approx \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ ce qui correspond à l'expression d'une loi de Poisson P(λ)

Conclusion :

B(n ; p) converge vers P(λ) avec λ = np quand n est grand

NB : On utilisera l'approximation de la loi binômiale par la loi de Poisson lorsque les 3 conditions ci-après sont simultanément vérifiées :

$$\begin{cases} p \leq 0{,}1 \\ n \geq 30 \\ np < 15 \end{cases}$$

3. Théorème de la limite centrée

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ une suite de n variables aléatoires réelles discrètes ou continues. Ces n variables ont, par hypothèse, les caractéristiques suivantes :

- elles suivent toutes la même loi de probabilité ;
- elles ont toutes la même moyemme m et la même variance σ^2 ;
- elles sont 2 à 2 mutuellement indépendantes.

Soit $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et soit $Z_n^* = \dfrac{Z_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$. Dès lors : Z_n^* suit une loi normale centrée réduite.

En d'autres termes : $\lim P\left[Z_n^* < z\right] = \Phi(z)$ quand n tend vers l'infini.

Exemple de synthèse sur les convergences en probabilité et en loi : extrait de HEC 2001 Maths 1 option économique

On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce de monnaie équilibrée. On associe à cette expérience une suite (X_n), $n > 0$ de variables aléatoires indépendantes suivenat la loi de Bernoulli de paramètre ½ . Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose :

$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

1. a. Déterminer la loi de probabilité de S_n
   b. Quelles sont l'espérance et la variance de S_n ?
2. a. Montrer que, pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver une constante K_e telle que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on ait l'inégalité :

$$P\left[\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{K_e}{n}$$

b. Déduire de la majoration obtenue quen pour tout réel r vérifiant 0<r<1/2, on a :

$$\lim P\left[\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{n^r}\right] = 0 \text{ quand n tend vers } +\infty$$

3. Montrer, à l'aide du théorème de la limite centrée que la suite définie pour tout n supérieur ou égal à 1 par :

$$n \mapsto P\left[\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

admet une limite non nulle.

1.a. S_n correspond, par hypothèse, à une somme de n variables de Bernoulli identiques (car toutes de paramètre ½ et indépendantes. Donc S_n suit une loi binômiale de paramètres n et ½ :

b. $E(S_n)$ = n. ½ = $\frac{n}{2}$ et $V(S_n)$ = n. ½. (1 – ½) = $\frac{n}{4}$

4. Appelons Z_n la variable définie par $Z_n = \frac{S_n}{n}$ et appliquons lui l'inégalité de Bienaymé-Tchébycheff. Pour cela calculons $E(Z_n)$ et $V(Z_n)$:

$$E(Z_n) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(S_n) = \frac{1}{n}.\frac{n}{2} = \frac{1}{2}$$

$$V(Z_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{1}{n^2}\frac{n}{4} = \frac{1}{4n}$$

On peut alors écrire :

Pour tout réel ε strictement positif : $P\left[\left|Z_n - E(Z_n)\right| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2}$

Soit encore : $P\left[\left|Z_n - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2} \Leftrightarrow P\left[\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$

Dès lors : $K_e = \frac{1}{4\varepsilon^2}$

b. Appliquons de nouveau à Z_n l'inégalité de Bienaymé-Tchébycheff et posons $\varepsilon = \frac{1}{n^r}$. Dès lors :

$$P\left[\left|Z_n - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{n^r}\right] \leq \frac{1}{4n}.n^{2r} \Leftrightarrow P\left[\left|Z_n - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{n^r}\right] \leq \frac{1}{4n^{1-2r}}$$

Pour passer à la limite, remarquons que, comme 0<r<1/2 alors : 0<2r<1 donc –1<-2r<0 et finalement : 0<1-2r<1. Dès lors : lim $\frac{1}{4n^{1-2r}}$ = 0 quand n tend vers l'infini. Enfin comme une probabilité est positive, on en déduit, grâce au théorème des gendarmes, que

$\lim P\left[\left|Z_n - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{n^r}\right]$ = 0 quand n tend vers l'infini.

5. Soit $Z_n^* = \frac{Z_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ avec :

m = $E(X_1)$= $E(X_2)$ = … = $E(X_n)$ = $\frac{1}{2}$ et $\sigma = \sqrt{V(X_1)} = \sqrt{V(X_2)} = \ldots = \sqrt{V(X_n)} = \sqrt{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

Pour utiliser le théorème de la limite centrée, faisons apparaître $Z_n^* = \dfrac{Z_n - m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ à partir de la suite dont on doit démontrer que la limite est non nulle. Ainsi :

$$P\left[\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = P\left[\frac{\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right|}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \geq 1\right] = P\left[\frac{\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right|}{\frac{1}{2\sqrt{n}}.} \geq 2\right] = P\left[\frac{\left|Z_n - \frac{1}{2}\right|}{\frac{1/2}{\sqrt{n}}.} \geq 2\right] = P\left[\left|Z_n *\right| \geq 2\right]$$

$= 1 - P\left[\left|Z_n *\right| < 2\right]$

$= 1 - (P\left[-2 < Z_n * < 2\right])$.

Or quand n tend vers l'infini, le théorème de la limite centrée permet d'écrire que :
$P[Z_n*<z] = \Phi(z)$ où $\Phi(z)$ représente l'image du réel z par la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Ainsi :

$$P\left[\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = P\left[\left|Z_n *\right| \geq 2\right] = 1 - [\Phi(2) - \Phi(-2)]$$

$= 1-[\Phi(2)-1+\Phi(2)]$

$= 2 - 2\Phi(2)$

$= 2\ [1-\Phi(2)]$ qui est bien un réel non nul.