Convergences et approximations

1. Inégalité de Markov

a. Enoncé

Si X est une variable aléatoire à valeurs positives et admettant une espérance,
$\forall a > 0, P[X \geq a] \leq \frac{E(X)}{a}$

b. Démonstration

- Cas où X est une variable discrète

Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ les valeurs prises par X et $p_i = P(X = x_i)$.

Par définition :

$$E(X) = \sum_{i \in N} x_i \ p_i$$

et cette série est à termes positifs ou nuls. Dès lors :

$$E(X) \geq \sum_{x_i \geq a} x_i \ p_i \geq \sum_{x_i \geq a} a \ p_i \geq a \sum_{x_i \geq a} p_i$$

Donc :

$$E(X) \geq aP[X \geq a]$$

En d'autres termes :

$$P[X \geq a] \leq \frac{E(X)}{a}$$

- Cas où X est une variable continue

Soit f une densité de X. Puisque X prend des valeurs positives, $\forall x < 0, f(x) = 0$

Donc :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_{0}^{+\infty} tf(t)dt \geq \int_{a}^{+\infty} tf(t)dt \geq a \int_{a}^{+\infty} f(t)dt$$

Donc :

$$E(X) \geq aP[X \geq a]$$

En d'autres termes :

$$P[X \geq a] \leq \frac{E(X)}{a}$$

2. Inégalité de Bienaymé-Tchébychev

a. Enoncé

Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2,
$\forall \varepsilon > 0, P[|X - E(X)| \geq \varepsilon] \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$

b. Démonstration *(déjà requise à l'épreuve de maths 2 de l'ESSEC)*

D'après l'inégalité de Markov appliquée à une variable Y :

$$P[Y \geq a] \leq \frac{E(Y)}{a}$$

Soit : $Y = [X - E(X)]^2$

Dès lors :

$$E(Y) = E([X - E(X)]^2) = V(X)$$

Ainsi :
$$P[[X - E(X)]^2 \geq a] \leq \frac{V(X)}{a}$$

Soit : $a = \varepsilon^2$

Dans ce cas :
$$P[[X - E(X)]^2 \geq \varepsilon^2] \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

soit encore :

$$P[|X - E(X)| \geq \varepsilon] \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

3. Loi faible des grands nombres

a. Enoncé

Soit $(X_n)_{n\in N*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une même espérance m et une même variance et soit, pour tout $n \in N *, \overline{X_n} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$,
alors, $\forall\varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P[|\overline{X_n} - m| \geq \varepsilon] = 0$

a. Démonstration

Il s'agit d'appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev à X_n :

$$P[|X_n - E(X_n)| \geq \varepsilon] \leq \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2}$$

Or :

$$E(\overline{X_n}) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m = \frac{1}{n}nm$$

Finalement :

$$E(\overline{X_n}) = m$$

Par ailleurs :

$$V(\overline{X_n}) = V\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

car $(X_n)_{n\in N*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes

Soit : $\sigma^2 = V(X_1) = V(X_2) = \cdots = V(X_n)$

Dès lors :

$$V(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_n) = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Ainsi, en reportant dans l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev :

$$P[|\overline{X_n} - m| \geq \varepsilon] \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Or une probabilité est positive et $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = 0$

Par théorème des encadrements, on en déduit que $\forall\varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P[|\overline{X_n} - m| \geq \varepsilon] = 0$

4. Convergence en loi

a. Définition de la convergence en loi d'une suite $(X_n)_{n\in N*}$ de variables aléatoires vers une variable aléatoire X
Une suite $(X_n)_{n\in N*}$ de variables aléatoires converge en loi vers X si $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$

b. Cas où les $X_n, n \in N*$, prennent leurs valeurs dans Z
Une suite $(X_n)_{n\in N*}$ de variables aléatoires converge en loi vers X si et seulement si $\lim_{n\to\infty} P[X_n = k] = P[X = k]$

c. Convergence d'une suite de variables aléatoires suivant la loi binomiale $B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ vers une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $P(\lambda)$

5. Théorème limite central

Si $(X_n)_{n\in N*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, et admettant une variance σ^2 non nulle, la suite des variables aléatoires centrées réduites $\overline{X_n *} = \sqrt{n}.\frac{\overline{X_n}-m}{\sigma}$ associées aux variables $\overline{X_n} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}, n \in N*$, converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

D'où : pour $-\infty \leq a < b \leq +\infty, \lim_{n\to\infty} P[a \leq \overline{X_n^*} \leq b] = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

6. Exemples d'approximations

a. Approximation de la loi binomiale par la loi normale
$B(n,p) \dashrightarrow N(np, npq)$

b. Approximation de la de Poisson par la loi normale
$P(\lambda) \dashrightarrow N(\lambda, \lambda)$