

## Compléments sur les variables aléatoires discrètes

### 1. Couples de variables discrètes

- a. Loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes

Elle est caractérisée par la donnée de  $X(\Omega)$ ,  $Y(\Omega)$  et  $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P[(X = x) \cap (Y = y)]$

- b. Lois marginales

- i. Loi de X :

$$\forall x \in X(\Omega), P[X = x] = \sum_{y \in Y(\Omega)} P[(X = x) \cap (Y = y)]$$

$$\forall x \in X(\Omega), P[X = x] = \sum_{y \in Y(\Omega)} P[(X = x)/(Y = y)]P[Y = y]$$

- ii. Loi de Y :

$$\forall y \in Y(\Omega), P[Y = y] = \sum_{x \in X(\Omega)} P[(X = x) \cap (Y = y)]$$

$$\forall y \in Y(\Omega), P[Y = y] = \sum_{x \in X(\Omega)} P[(Y = y)/(X = x)]P[X = x]$$

- c. Lois conditionnelles (cf. : problème de l'auto-stoppeur)

- d. Loi d'une variable  $Z = g(X, Y)$  où  $g$  est une fonction définie sur l'ensemble des valeurs prises par le couple  $(X, Y)$

- i.  $Z = X + Y$  est aussi une variable aléatoire discrète  
 ii.  $Z = XY$  est aussi une variable aléatoire discrète

- e. Théorème du transfert : espérance d'une variable aléatoire  $Z = g(X, Y)$  où  $g$  est une fonction réelle définie sur l'ensemble des valeurs prises par le couple  $(X, Y)$  de variables aléatoires :

$$E[g(X, Y)] = \sum_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} g(x, y) \cdot P[(X = x) \cap (Y = y)]$$

- f. Linéarité de l'espérance

Si 2 variables  $X$  et  $Y$  ont une espérance, alors  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, aX + bY$  a une espérance et  $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

- g. Indépendance de 2 variables aléatoires discrètes

2 variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes lorsque

$$\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), P[(X = x) \cap (Y = y)] = P[X = x] P[Y = y]$$

- h. Espérance du produit de 2 variables aléatoires discrètes indépendantes

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $E(XY) = E(X)E(Y)$

- i. Loi du min et loi du max de 2 variables aléatoires discrètes indépendantes
- i.  $Z = \max(X, Y)$ 
    - On commence par déterminer  $P(Z \leq k) = P(X \leq k \cap Y \leq k)$
    - Puis  $P(Z = k) = P(Z \leq k) - P(Z \leq k - 1)$
  - ii.  $Z = \min(X, Y)$ 
    - On commence par déterminer  $P(Z \geq k) = P(X \geq k \cap Y \geq k)$
    - Puis  $P(Z = k) = P(Z \geq k) - P(Z \geq k + 1)$
- j. Stabilité des lois de somme
- i. Somme de 2 lois binomiales  
Si  $X$  et  $Y$  sont 2 variables aléatoires indépendantes et telles que  $X \hookrightarrow B(n, p)$  et  $Y \hookrightarrow B(m, p)$  alors  $X + Y \hookrightarrow B(n + m, p)$
  - ii. Somme de 2 lois de Poisson  
Si  $X$  et  $Y$  sont 2 variables aléatoires indépendantes et telles que  $X \hookrightarrow P(\lambda)$  et  $Y \hookrightarrow P(\mu)$  alors  $X + Y \hookrightarrow P(\lambda + \mu)$
- k. Covariance
- i. Définition :  $cov(X, Y) = E([(X - E(X))][Y - E(Y)])$
  - ii. Propriétés :  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,
    - linéarité à gauche :  $cov(aX + bY, Z) = a.cov(X, Z) + b.cov(Y, Z)$
    - linéarité à droite :  $cov(X, aZ + bW) = a.cov(X, Z) + b.cov(X, W)$
    - $\forall a \in \mathbb{R}, cov(X, a) = 0$
  - iii. Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $cov(X, Y) = 0$
- l. Formule de Huyghens :  $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
- m. Coefficient de corrélation linéaire
- i. Définition :  $\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$
  - ii. Propriétés
    - $|\rho(X, Y)| \leq 1$
    - $\rho(X, Y) = \pm 1$  si et seulement si  $X$  et  $Y$  sont presque sûrement liées par une relation du type  $Y = aX + b$  où  $a$  et  $b$  sont 2 réels ( $a \neq 0$ ).
    - En d'autres termes :  $\rho(X, Y) = \pm 1 \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R} * \mathbb{R}, P(Y = aX + b) = 1$
    - Si  $a > 0$ ,  $\rho(X, Y) = 1$  et, dans ce cas,  $Y$  varie dans le même sens que  $X$
    - Si  $a < 0$ ,  $\rho(X, Y) = -1$  et, dans ce cas,  $Y$  varie dans le sens contraire de  $X$
- n. Variance de la somme de 2 variables aléatoires discrètes  
 $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X, Y)$
- o. Cas de 2 variables discrètes indépendantes  
Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors :  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

## 2. Suites de variables aléatoires discrètes

- a. Indépendance mutuelle de  $n$  variables aléatoires réelles discrètes

Les variables  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes si

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), P\left(\bigcap_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i)$$

- b. Indépendance d'une suite infinie de variables aléatoires réelles discrètes

Une suite de variables discrètes  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables mutuellement indépendantes si, pour toute partie finie  $I$  de  $\mathbb{N}^*$ , les variables  $(X_k)_{k \in I}$  sont mutuellement indépendantes

- c. Lemme des coalitions (admis)

Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont indépendantes, toute variable aléatoire fonction de  $X_1, X_2, \dots, X_p$  est indépendante de toute variable aléatoire fonction de  $X_{p+1}, X_{p+2}, \dots, X_n$

- d. Espérance de la somme de  $n$  variables réelles discrètes

Si les variables  $X_1, X_2, \dots, X_n$  définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  possèdent chacune une espérance, alors :

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

- e. Variance de la somme de  $n$  variables aléatoires réelles discrètes indépendantes

Si les variables  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes et possèdent chacune une variance, alors :

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$$