Compléments sur les suites et les séries

1. Comparaisons des suites réelles

a. Suite négligeable devant une suite

i. Définition d'une suite (u_n) négligeable devant une suite (v_n) lorsque n est au voisinage de $+\infty$

$u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \exists \varepsilon_n$ telle que $u_n = \varepsilon_n . v_n$ à partir d'un certain rang, avec $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$

Exemple 1 : $n = o(n^2)$.
En effet : $n = \frac{1}{n} . n^2$. Donc $n = \varepsilon_n . n^2$ avec $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ et $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$

Exemple 2 : $n = o(n^4)$.
En effet : $n = \frac{1}{n^3} . n^4$. Donc $n = \varepsilon_n . n^4$ avec $\varepsilon_n = \frac{1}{n^3}$ et $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$

ii. Caractérisation

Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, $u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$

iii. Propriétés

- Transitivité
  Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$

- Combinaisons linéaires
  Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$
  alors $\forall (a, b) \in R^2, au_n + bv_n = o(w_n)$

iv. Négligeabilités usuelles pour $\alpha > 0$

- $\ln(n) = o(n^\alpha)$
- $n^\alpha = o(e^n)$
- $\ln(n) = o(e^n)$

b. Suites équivalentes

i. Définition d'une suite (u_n) équivalente à une suite (v_n) lorsque n est au voisinage de $+\infty$

$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \exists \alpha_n$ telle que $u_n = \alpha_n . v_n$ à partir d'un certain rang, avec $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$

ii. Caractérisation

Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$

iii. Propriétés

- Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n w_n \sim v_n w_n$
- Si $u_n \sim v_n$ alors $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$et si $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang
- Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n^k \sim v_n^k, \forall k \in N$

iv. Equivalents usuels

Soit une suite (u_n) telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Dès lors :

- $\ln(1 + u_n) \sim u_{\ n}$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
- $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$

v. Rappel sur les polynômes : $\sum_{i=0}^{k} a_i n^i \sim \ a_k n^k$

vi. Limite et équivalence

- Si $u_n \sim v_n$ et si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$
- Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \neq 0$ alors $u_n \sim l$

2. Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

a. Notion de point fixe d'une application

Soit f une fonction définie sur une partie A de R.
On appelle point fixe de f tout réel $x \in A$ tel que $f(x) = x$

b. Si (u_n) converge vers un réel l et si f est continue en l, alors l est un point fixe de f.
Dès lors : $l = f(l)$

3. Compléments sur les séries

a. Lien entre la suite (u_n) et la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$

b. Convergence des séries de Riemann : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$

c. Comparaison des séries à termes positifs, au moins à partir d'un certain rang :

i. $u_n \leq v_n$. Dès lors :

- Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge aussi
- Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge aussi

ii. $u_n = o(v_n)$: dès lors, si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge aussi

iii. $u_n \backsim v_n$: dès lors : $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

d. Exemples d'études de séries à termes quelconques