Critère intégral de Cauchy

1. Enoncé

Soit *f* une fonction définie, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$.
Soit $\forall n \in N^*, u_n = f(n)$
Dès lors, la série $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow$l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge

2. Démonstration

Par hypothèse, *f* est décroissante. Dès lors :

$\forall n \in N^*, \forall x \in [n, n+1], f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$

En d'autres termes $u_{n+1} \leq f(x) \leq u_n$

En intégrant de n à $n+1$:

$$\int_n^{n+1} u_{n+1} dt \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq \int_n^{n+1} u_n dt$$

$$u_{n+1} \int_n^{n+1} dt \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq u_n \int_n^{n+1} dt$$

Or :

$$\int_n^{n+1} dt = n + 1 - n = 1$$

Ainsi :

$$u_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq u_n$$

En remplaçant *k* par *n* et en sommant chacun des 3 termes :

$$\sum_{k=1}^{n} u_{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Soit encore :

$$\sum_{k=1}^{n+1} u_k - u_1 \leq \int_1^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Pour démontrer l'équivalence, il convient de démontrer l'implication dans chacun des 2 sens.

- Montrons d'abord que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge

On sait que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} u_k - u_1 \leq \int_1^{n+1} f(t)dt \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} u_k \leq u_1 + \int_1^{n+1} f(t)dt$$

Comme, par hypothèse, $f \geq 0$:

$$\int_1^{n+1} f(t)dt \leq \int_1^{n+1} f(t)dt + \int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt = \int_1^{+\infty} f(t)dt$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n+1} u_k \leq u_1 + \int_1^{+\infty} f(t)dt$$

Soit :

$$U_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k = \sum_{k=1}^{n+1} f(k)$$

$$U_{n+1} - U_n = u_{n+1} = f(n+1)$$

Comme, par hypothèse, $f \geq 0$, $U_{n+1} - U_n = f(n+1) \geq 0$ donc la suite $(U_n)_{n\in N^*}$ est croissante

Or, on sait, par hypothèse, que : $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Donc :

$(U_n)_{n\in N^*}$ est majorée. La suite $(U_n)_{n\in N^*}$ étant, en outre, croissante, elle est donc bien convergente.

En d'autres termes la série $\sum u_n$ converge

- Montrons ensuite que $\sum u_n$ converge $\Rightarrow$ $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge

Par hypothèse, dans cette partie de la démonstration, $\sum u_n$ converge. Donc la suite

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

est majorée. Soit *M* son majorant.

Dans ce cas :

$$\forall n \in N^*, U_n \leq M$$

Or :

$$\int_1^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} u_k = U_n \leq M$$

Donc :

$$\forall n \in N^*, \int_1^{n+1} f(t)dt \leq M$$

Soit :

$$F(x) = \int_1^{x} f(t)dt$$

$F'(x) = f(x) \geq 0$ par hypothèse. Donc *F* est croissante et on vient de voir que :

$$\forall n \in N^*, \int_1^{n+1} f(t)dt = F(n+1) \leq M$$

Par conséquent *F* est majorée par *M*.

Ainsi, *F* a une limite finie lorsque *x* tend vers $+\infty$

Finalement :

$$\int_1^{+\infty} f(t)dt \text{ converge}$$

3. Utilité : séries de Riemann

On sait, d'après le critère de Riemann que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$

Soit $f(t) = \frac{1}{t^\alpha} = t^{-\alpha}$ pour $t \in [1, +\infty[$

f une fonction définie et positive sur $[1, +\infty[$.

En outre :

$f'(t) = -\alpha t^{-\alpha-1} = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} < 0, \forall t \in [1, +\infty[$ et en supposant que $\alpha > 0$.

Donc *f* est bien une fonction définie, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$, pour $\alpha > 0$

Dans ce cas :

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow$l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge

Finalement :

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$