

## Binomial - Géométrie

On effectue une succession d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes jusqu'à obtenir le premier succès. Soit  $a$  la probabilité du succès à l'issue de chaque épreuve, avec  $a \in ]0,1[$ .

Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves de cette première série.

On réalise ensuite une seconde série d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Soit  $p$  la probabilité du succès à l'issue de chaque épreuve, avec  $p \in ]0,1[$ . Le nombre d'épreuves de cette seconde série d'épreuves est égal au nombre d'épreuves de la première série qu'il a été nécessaire de réaliser pour obtenir le premier succès.

Soit  $Y$  le nombre de succès obtenus à l'issue de la seconde série d'épreuves.

1. Rappeler la loi de  $X$
2. Déterminer la loi conditionnelle de  $Y$  sachant que  $[X = k]$
3. Ecrire la formule de la loi conjointe du couple  $(X, Y)$
4. Déterminer la loi marginale de  $Y$

### 1. Rappel de la loi de $X$

Une variable aléatoire égale au temps d'attente du premier succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli identiques – chacune assortie d'une probabilité de succès égale à  $a$  – et indépendantes suit une loi géométrique de paramètre  $a$ . Ainsi :

$$X \hookrightarrow G(a) \Leftrightarrow \begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ P[X = k] = (1 - a)^{k-1} \cdot a \end{cases}$$

### 2. Loi conditionnelle de $Y$ sachant que $[X = k]$

$Y/[X = k]$  est le nombre de succès à l'issue de la seconde série d'épreuves dans l'hypothèse où le nombre d'épreuves de la première série est égal à  $k$ .

Or, si le nombre d'épreuves de la première série est égal à  $k$ , c'est-à-dire s'il a fallu  $k$  épreuves de la première série pour obtenir le premier succès, la seconde épreuve est répétée  $k$  fois.

Dès lors,  $Y/[X = k]$  est nombre de succès à l'issue de la seconde série d'épreuves dans l'hypothèse où cette seconde épreuve est répétée  $k$  fois. Les épreuves de seconde série sont des épreuves de Bernoulli – de probabilité de succès égale à  $p$  – identiques et indépendantes. Donc,  $Y/[X = k]$  suit une loi binomiale de paramètres  $k$  et  $p$ . Ainsi :

$$Y/[X = k] \hookrightarrow B(k, p) \Leftrightarrow \begin{cases} (Y/[X = k])(\Omega) = [0, k] \\ P[Y = i/X = k] = \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \end{cases}$$

### 3. Loi conjointe du couple $(X, Y)$

$$P[Y = i \cap X = k] = P[Y = i/X = k]P[X = k]$$

$$\text{Si } k \geq i \text{ alors } P[Y = i \cap X = k] = \binom{k}{i} p^i q^{k-i} (1 - a)^{k-1} \cdot a$$

Si  $k < i$  alors  $P[Y = i \cap X = k] = 0$

#### 4. Loi marginale de Y

$$P[Y = i] = \sum_{k=1}^{+\infty} P[Y = i \cap X = k] = \sum_{k=1}^{i-1} P[Y = i \cap X = k] + \sum_{k=i}^{+\infty} P[Y = i \cap X = k]$$

$$P[Y = i] = 0 + \sum_{k=i}^{+\infty} \binom{k}{i} p^i q^{k-i} (1-a)^{k-1} \cdot a = ap^i \sum_{k=i}^{+\infty} \binom{k}{i} q^{k-i} (1-a)^{k-1-i+i}$$

$$P[Y = i] = ap^i (1-a)^{i-1} \sum_{k=i}^{+\infty} \binom{k}{i} q^{k-i} (1-a)^{k-i} = ap^i (1-a)^{i-1} \sum_{k=i}^{+\infty} \binom{k}{i} [q(1-a)]^{k-i}$$

Or, on a vu (cf. : fiche sur la loi de Pascal) que :

$$\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} q^{k-r} = \frac{1}{(1-q)^{r+1}}$$

Dès lors :

$$P[Y = i] = \frac{ap^i (1-a)^{i-1}}{[1 - q(1-a)]^{i+1}}$$