

Déterminer une base de F

1. Rappel des théorèmes à utiliser

\mathcal{F} est une base de F si \mathcal{F} est une famille libre et génératrice

Pour mémoire :

- \mathcal{F} est une famille **génératrice** de E si tout vecteur de E peut s'écrire sous forme d'une combinaison linéaire de vecteurs de \mathcal{F} .
 - L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de E appelé sous-espace engendré par \mathcal{F} et noté $\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p)$
 - Si $F = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1})$ et si e_{p+1} est combinaison linéaire de e_1, e_2, \dots, e_p alors $F = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p)$
 - $\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p, 0_E) = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p)$
 - $\forall (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in R^{*p}$, si $F = \text{Vect}(\alpha_1 e_1, \alpha_2 e_2, \dots, \alpha_p e_p)$ alors $F = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p)$

- $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une famille **libre** de F si :

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$$

- Soit x un vecteur de E . La famille (x) est libre si $x \neq 0_E$
- Soit x et y 2 vecteurs de E . La famille (x, y) est libre si x et y ne sont pas colinéaires. En d'autres termes, x et y ne doivent pas être proportionnels
- *A contrario*, \mathcal{F} est une famille liée de E si et seulement si l'un des vecteurs de cette famille est combinaison linéaire des autres. Ainsi :
 - Une famille contenant 2 fois le même vecteur est liée
 - Une famille contenant le vecteur nul est liée.

Par ailleurs, une famille \mathcal{F} libre (respectivement génératrice) à n vecteurs d'un espace vectoriel F de dimension n est une base. En d'autres termes, **si $\text{Card } \mathcal{F} = \dim F$ alors :**

\mathcal{F} est une base de $F \Leftrightarrow \mathcal{F}$ est une famille libre $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ est une famille génératrice

- $\dim R^n = n$
- $\dim M_{n,p}(R) = np$
- $\dim R_n[X] = n + 1$

2. Exemples

a. Exemple 1 : déterminer une base de F où

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), ax + by + cz = 0, (a, b, c) \in \mathbb{R}^{*3} \right\}$$

On a une équation à 3 inconnues donc il y a 2 paramètres :

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{a}{c} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{b}{c} \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$F = Vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{a}{c} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{b}{c} \end{pmatrix} \right) = Vect \left(\frac{1}{c} \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix} \right)$$

$$F = Vect \left(\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix} \right)$$

F est donc le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ engendré par $\left(\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix} \right)$

Donc $\left(\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de F . Montrons alors que

$\left(\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 c = 0 \\ \lambda_2 c = 0 \\ -\lambda_1 a - \lambda_2 b = 0 \end{cases}$$

Comme $c \neq 0$, on tire des 2 premières équations : $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ qui vérifient la 3^{ème}

équation. Donc $\left(\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre.

$\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre et génératrice. Donc \mathcal{F} est une base de F .

b. Exemple 2 : déterminer une base de l'espace vectoriel F défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & b \end{pmatrix} = a.A + b.B$$

$$\text{Où : } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & b \end{pmatrix}$$

Donc : $F = \text{Vect}(A, B)$.

Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ engendré par les vecteurs A et B .

En d'autres termes, (A, B) est une famille génératrice.

Par ailleurs, les vecteurs A et B ne sont pas colinéaires donc (A, B) est une famille libre.

(A, B) est ainsi une base de F .

c. Exemple 3 : Montrer que les matrices A, B, C et D définies ci-après :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ sont une base de } M_2(R)$$

Montrons d'abord que ces 4 matrices forment une famille libre :

$$a.A + b.B + c.C + d.D = 0 \Leftrightarrow a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$a.A + b.B + c.C + d.D = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & b \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 \\ d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a.A + b.B + c.C + d.D = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + d = 0 \\ a + b + c = 0 \\ a + c + d = 0 \\ b + c + d = 0 \end{cases}$$

Résolvons ce système par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L'_2 = L_4 \\ L_3 \\ L'_4 = L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L'_2 \\ L'_3 = L_1 - L_3 \\ L'_4 = L_1 - L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L'_2 \\ L''_3 = L'_2 - L'_3 \\ L''_4 = L_1 - L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L'_2 \\ L''_3 \\ L'''_4 = L''_3 + L''_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, en revenant au système d'équations et en repartant de la dernière ligne pour remonter jusqu'à la première ligne :

$$d = 0; c = 0; b = 0; a = 0.$$

Donc (A, B, C, D) forme une famille libre.

$$\text{En outre, Card}(A, B, C, D) = 4 = \dim M_2(R) = 2 \times 2$$

Ainsi : (A, B, C, D) est une base de $M_2(R)$.

- d. Exemple 4 : **Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{F} = (u, v, w)$ définie ci-après est une base de R^3 : $u = (1, 2, -1)$, $v = (0, 2, 1)$, $w = (-1, 0, 3)$ puis décomposer le vecteur $x = (4, -8, 1)$ dans cette base**

Montrons d'abord que \mathcal{F} est une famille libre. Soit $(a, b, c) \in R^3$

$$a.u + b.v + c.w = 0 \Leftrightarrow a(1, 2, -1) + b(0, 2, 1) + c(-1, 0, 3) = (0, 0, 0)$$

$$a.u + b.v + c.w = 0 \Leftrightarrow (a, 2a, -a) + (0, 2b, b) + (-c, 0, 3c) = (0, 0, 0)$$

$$a.u + b.v + c.w = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 0 \\ 2a + 2b = 0 \\ -a + b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 0 \\ a + b = 0 \\ -a + b + 3c = 0 \end{cases}$$

Utilisons la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L'_2 = L_2 - L_1 \\ L'_3 = L_1 + L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L'_2 \\ L''_3 = L'_3 - L'_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, en revenant au système d'équations et en repartant de la dernière ligne pour remonter jusqu'à la première ligne : $c = 0$; $b = 0$; $a = 0$. Donc : \mathcal{F} est une famille libre.

Par ailleurs : $\text{Card}\mathcal{F} = 3 = \dim R^3$. Ainsi : \mathcal{F} est une base de R^3 .

Enfin, pour décomposer le vecteur x dans la base \mathcal{F} , il convient de déterminer $(a, b, c) \in R^3$ tels que $x = a.u + b.v + c.w$

$$x = a.u + b.v + c.w \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 4 \\ 2a + 2b = -8 \\ -a + b + 3c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 4 \\ a + b = -4 \\ -a + b + 3c = 1 \end{cases} \quad (u, v, w)$$

Utilisons la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L'_2 = L_2 - L_1 \\ L'_3 = L_1 + L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L'_2 \\ L''_3 = L'_3 - L'_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

Ainsi : $c = 13$; $b + 13 = -8 \Rightarrow b = -21$; $a - 13 = 4 \Rightarrow a = 17$

Finalement : $x = 17.u - 21.v + 13.w$

- e. Exemple 5 : Soit $u = (1, -1, 2, 1)$, $v = (2, 1, 0, 1)$, $w = (3, 3, -2, 1)$
et $F = \text{Vect}(u, v, w)$. Déterminer une base de F .

On remarque que : $w = 2v - u$. Donc w est combinaison linéaire de u et v . Ainsi

$F = \text{Vect}(u, v, w) = \text{Vect}(u, v)$. Par conséquent, F est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par u et v . Donc (u, v) est une famille génératrice de F .

Par ailleurs, u et v ne sont pas colinéaires. Donc (u, v) est une famille libre.

Par conséquent, (u, v) est une base de F .